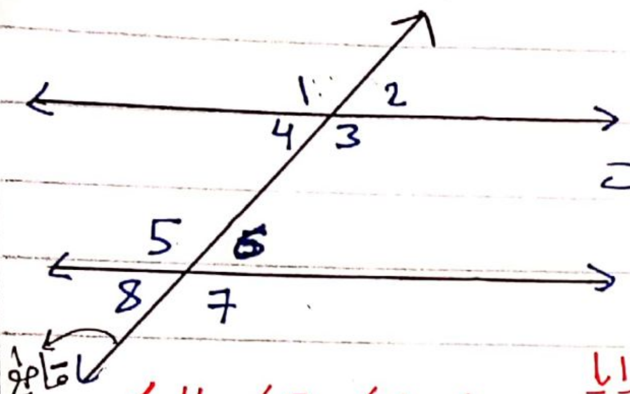
الوحدة (7)

اثبات توازي المستقيمات وتعامدها

الدرس (1)

مقدمة :- ((مراجعة صف سابع))

اذا قطع مستقيم مستقيمين فيشكل مجموعة من الزوايا كما يلي :-



* زاويتين متناظرتين

تقعان في نفس الجهة احداهما داخلية والاخرى خارجية وغير متجاورات

((∠3 , ∠7)) ، ((∠4 , ∠8))

((∠5 , ∠1)) و ((∠6 , ∠2))

زوايا داخلية ∠5 و ∠6 و ∠3 و ∠4

زوايا خارجية ∠7 و ∠8 و ∠1 و ∠2

نفس الجهة ∠7 و ∠6 و ∠3 و ∠2

نفس الجهة ∠8 و ∠5 و ∠4 و ∠1

* زاويتين متبادلتين داخلياً

تقعان في جهتين مختلفتين

وتكون داخليتين ((غير متجاورات))

((∠4 , ∠6)) و ((∠3 , ∠5))

* زاويتين متبادلتين خارجياً

تقعان في جهتين مختلفتين

وتكون خارجيتان ((غير متجاورات))

((∠7 , ∠1)) و ((∠8 , ∠2))

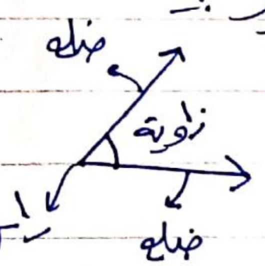
* زاويتين متحالفتين

تقعان في نفس الجهة

وتكونا داخليتين ((غير متجاورات))

((∠5 , ∠4)) و ((∠6 , ∠3))

تذكير :-



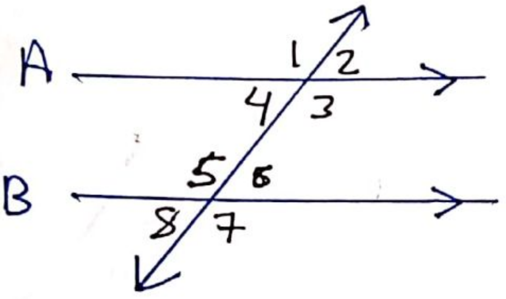
رمز الزاوية ∠ حيث تكتب الزاوية بحرف واحد وهو الرأس أو بثلاث حروف اوسطها الرأس أو نضع داخلها رقم.

ر. أفنان ابراهيم صافي

نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا

مراجعة مفهوم

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين في المستوى نفسه، فإن :-



$A \parallel B$

① كل زاويتين متناظرتين متطابقتان

$\angle 3 \cong \angle 7$ -----

يطابق

② كل زاويتين متبادلتين داخلياً أو خارجياً متطابقتان

$\angle 3 \cong \angle 5$ ----

③ كل زاويتين متحالفتان يكون مجموع قياسهما 180° حيث :-

$m\angle 4$ تقرأ :- قياس الزاوية 4 $\xleftrightarrow{\text{تنويه}}$

$m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ$

$m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ$

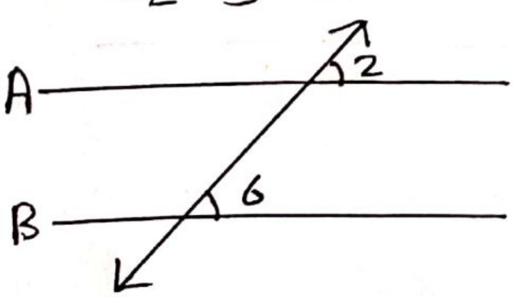
---

* سنتعلم في هذا الدرس كيفية استعمال أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين يقطعهما قاطع في المستوى نفسه لإثبات توازيهما، بحيث نبحث عن زوايا متناظرة أو متبادلة متساوية أو زوايا متحالفة مجموع قياسها 180 حتى تكون المستقيمات متوازيان ((عكس المسلمة صحيح))

مسلمة

عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

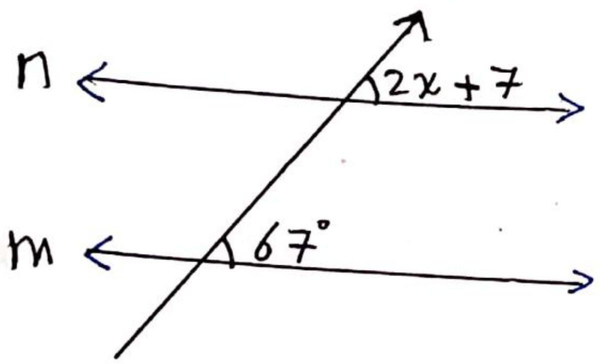
إذا قطع قاطع مستقيمين، ونتج عن التقاطع زاويتان متناظرتان متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.



إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 6$

فإن $A \parallel B$

مثال :- جد قيمة x في الشكل المجاور التي تجعل $n \parallel m$

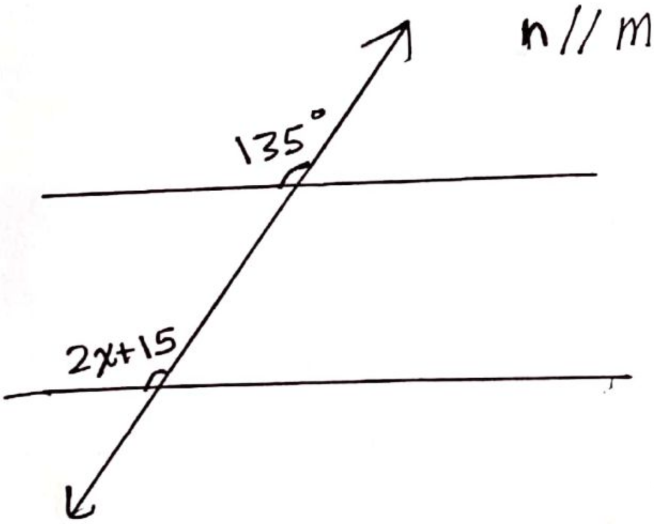


الحل :-
يكون المستقيمان متوازيين اذا كانت الزاويتان المتناظرتان متطابقتان

$$2x + \cancel{7} = 67$$
$$\cancel{-7} \quad -7$$
$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{60}{2}$$
$$x = 30°$$

التحقق من فهمي ص 71

جد قيمة x التي تجعل $n // m$



الحل :- يكون $n // m$ اذا كانت الزاويتان المتناظرتان متطابقتان

$$2x + \cancel{15} = 135$$
$$\cancel{-15} \quad -15$$
$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{120}{2}$$
$$x = 60$$

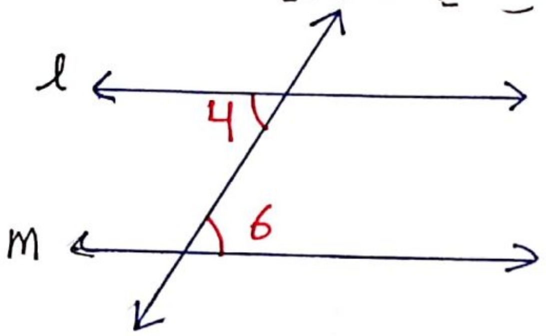
---

* يمكن ان تحدد ازواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين يقطعهما قاطع في المستوى نفسه ما اذا كان المستقيمان متوازيين أم لا

عكس نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا

* عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً :-

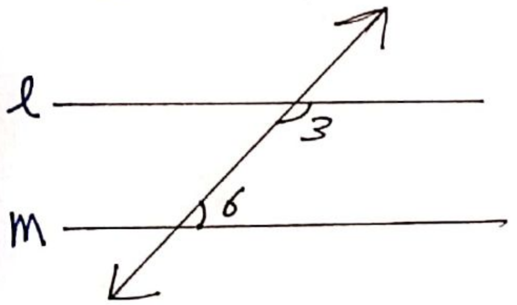
اذا قطع قاطع مستقيمين ، ونتج عن التقاطع زاويتان متبادلتان داخلياً متطابقتان فان المستقيمين متوازيان



اذا كانت $\angle 4 \cong \angle 6$ فان $l \parallel m$

* عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين

اذا قطع قاطع مستقيمين ، ونتج عن التقاطع زاويتان متحالفتان متكاملتان فان المستقيمين متوازيان

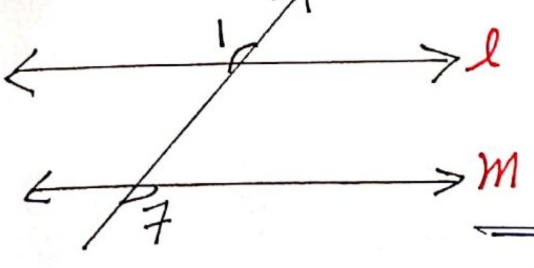


اذا كانت :-

$m\angle 3 + m\angle 6 = 180$ فان $l \parallel m$.

* عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً :-

اذا قطع قاطع مستقيمين ، ونتج عن التقاطع زاويتان متبادلتان خارجياً متطابقتان فان المستقيمين متوازيان

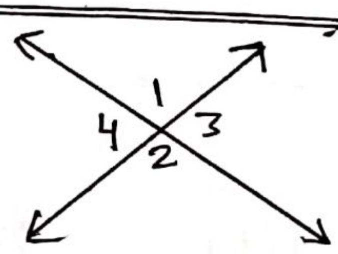


اذا كانت :-

$\angle 1 \cong \angle 7$ فان $l \parallel m$

يمكن استعمال عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين لاثبات النظريات السابقة.

تذكير



$\angle 1$ و $\angle 2$

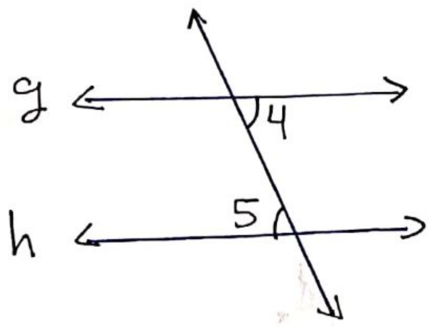
$\angle 4$ و $\angle 3$

متقابلتين بالرأس وقياسهما متساوي

مثال
استخدام عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

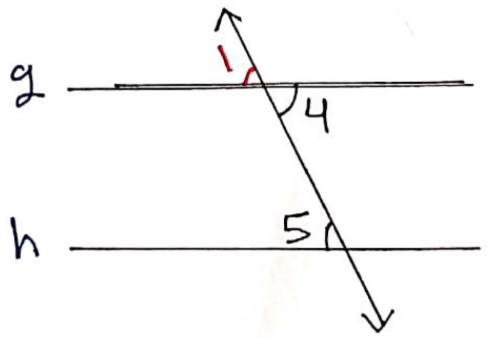
في الشكل المجاور اذا كانت $\angle 4 \cong \angle 5$ فاثبت ان $g \parallel h$ باستعمال المخطط السهمي

الحل :-



خطوة (1) :- اسمي $\angle 1$ التي تقابل بالرأس $\angle 4$

خطوة (2) :-



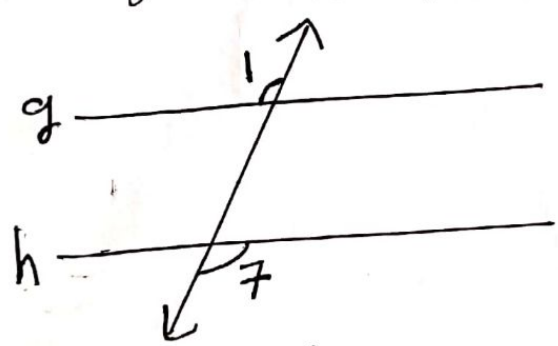
$\angle 4 \cong \angle 5$
(معطى)

$\angle 1 \cong \angle 4$
(متقابلتان بالرأس)

$\angle 1 \cong \angle 5 \rightarrow g \parallel h$
نتيجة
عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

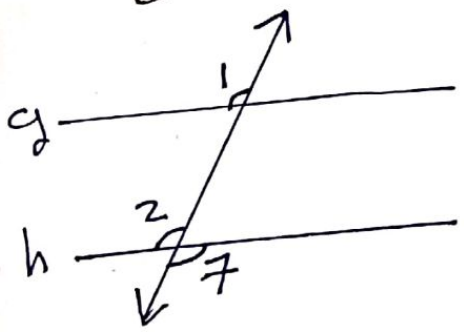
التحقق من فهمك
73 ص

في الشكل المجاور اذا كانت $\angle 1 \cong \angle 7$ فاثبت ان $g \parallel h$ باستعمال المخطط السهمي



خطوة (1) :- سمي $\angle 2$ التي تقابل بالرأس $\angle 7$

خطوة (2) :-



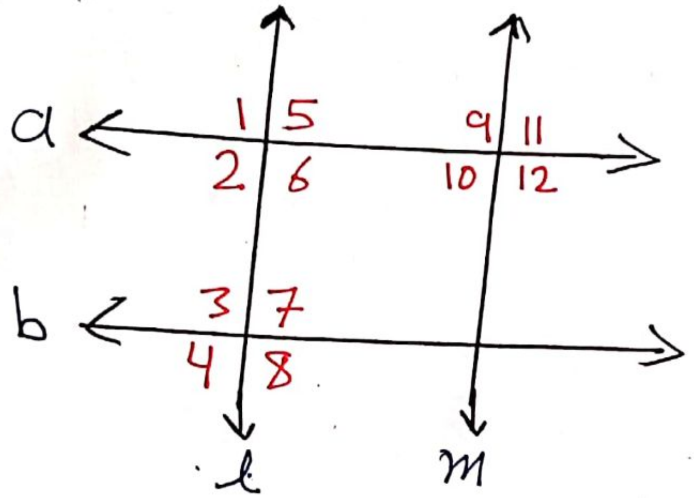
$\angle 1 \cong \angle 7$
(معطى)

$\angle 2 \cong \angle 7$
(تقابل بالرأس)

$\angle 1 \cong \angle 2 \rightarrow g \parallel h$
(نتيجة)
عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

ملاحظة ⟵ في المثالين السابقين نستطيع مباشرة اثبات توازي المستقيمين وذلك بالاعتماد على ((عكس نظريات المستقيمين المتوازيين وازواج الزوايا)) بحيث ان حدث تساوي لزاويتين متبادلتين أو متناظرتين او مجموع زاويتين متحالفتان 180 ⟸ مباشرة المستقيمان متوازيين

مثال



هل يمكن اثبات أن أياً من مستقيمات الشكل المجاور متوازية اعتماداً على المعطيات في كل مما يلي:

① $\angle 1 \cong \angle 8$

الحل: $\angle 8$ و $\angle 1$ متبادلتان خارجياً بالنسبة للمستقيمين a و b وبما أن $\angle 8 \cong \angle 1$ فإن $a \parallel b$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً

---

② $m\angle 5 + m\angle 9 = 180^\circ$

الحل: $\angle 9$ و $\angle 5$ متحالفتان بالنسبة للمستقيمين m و l .
وبما أن $m\angle 5 + m\angle 9 = 180$ فإن $m \parallel l$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين

---

③ $\angle 7 \cong \angle 2$

تحقق من فهمك

ص 73

$\angle 2$ و $\angle 7$ متبادلتان داخلياً بالنسبة للمستقيمين a و b
وبما أن $\angle 7 \cong \angle 2$ فإن $a \parallel b$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

---

④ $\angle 6 \cong \angle 12$

الحل: $\angle 12$ و $\angle 6$ متناظرتان بالنسبة للمستقيمين l و m وبما أن $\angle 12 \cong \angle 6$ فإن $l \parallel m$ بحسب عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

---

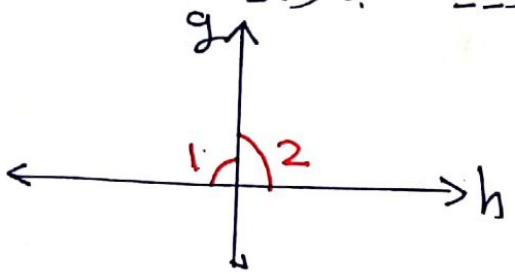
⑤ $m\angle 3 + m\angle 2 = 180$

الحل: $\angle 2$ و $\angle 3$ متحالفتان بالنسبة للمستقيمين b و a وبما أن $m\angle 3 + m\angle 2 = 180$ فإن $a \parallel b$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين

* فيما يأتي بعض النظريات المتعلقة بالمستقيمات المتعامدة اضافة الى نظريات خاصة تنتج حين يكون قاطع المستقيمين عمودياً عليهما

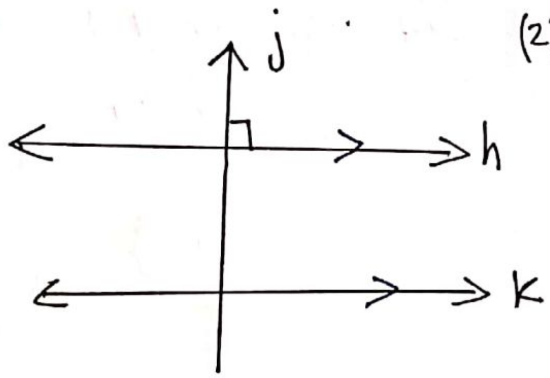
* نظرية الزاويتين المتجاورتين المتطابقتين — نظرية (1)

اذا تقاطع مستقيمان لتشكيل زاويتين متجاورتين متطابقتين فان المستقيمان متعامدان



اذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ فان $g \perp h$

* نظرية القاطع العمودي — نظرية (2)

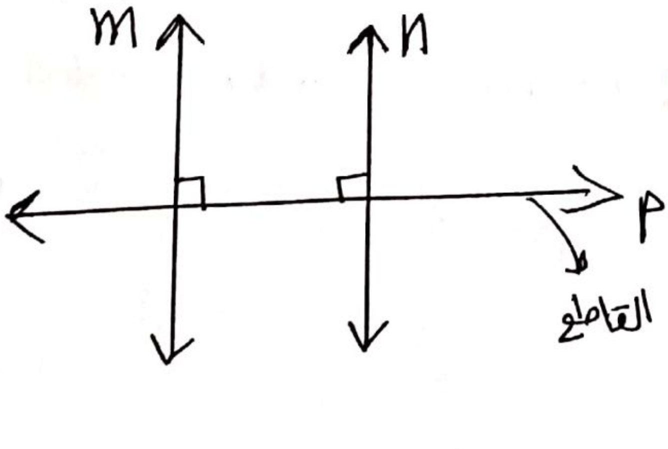


اذا كان مستقيم عمودياً على احد مستقيمين متوازيين ، فانه يكون عمودياً على المستقيم الآخر

اذا كان $k \parallel h$ و $j \perp h$ فان $j \perp k$

عكس نظرية القاطع العمودي — نظرية (3)

اذا قطع قاطع مستقيمين وكان عمودياً على كل منهما فان المستقيمين متوازيان



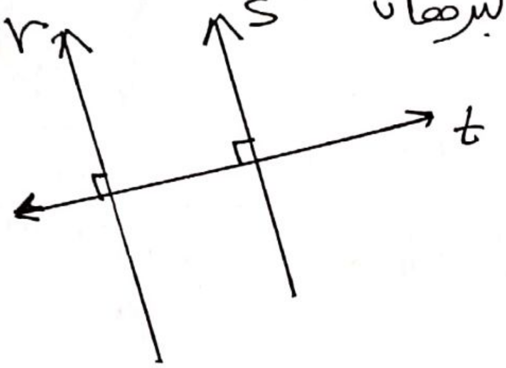
اذا كان $p \perp m$ و $p \perp n$

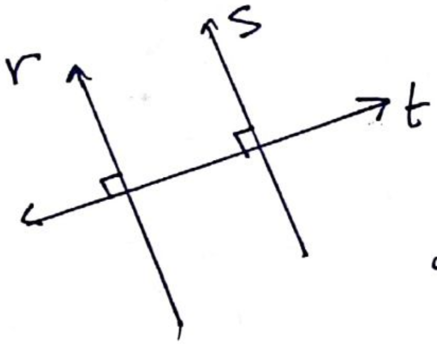
فان $m \parallel n$

مثال

اثبات النظرية (3)

استعمل المعلومات المعطاه في الشكل المجاور لاثبت ان $r \parallel s$ باستعمال البرهان ذي العمودين





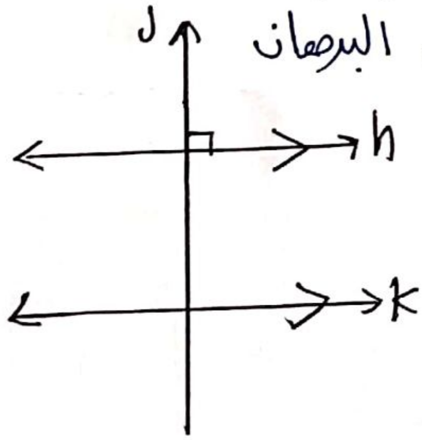
الحل :-

العبارات	المبررات
$\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان	معطى
$\angle 1 \cong \angle 2$	الزوايا القائمة متطابقة
$r \parallel s$	عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

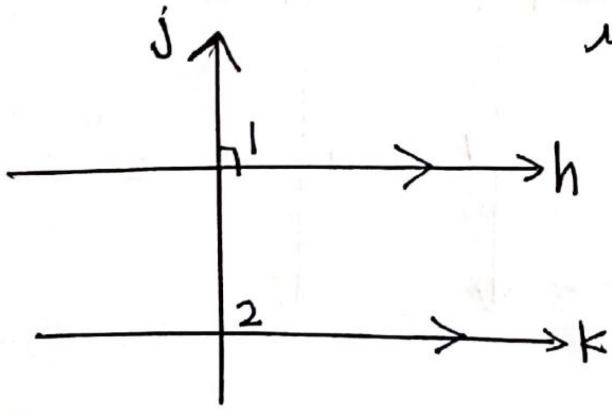
التحقق من فهمي

اثبات نظرية (2)

استعمل المعلومات المعطاه في الشكل المجاور لاثبت ان $k \perp j$ باستعمال البرهان ذي العمودية



العبارات	المبررات
$h \parallel k$	معطى
$\angle 1$ قائمة	معطى
$\angle 2$ قائمة	$\angle 2$ و $\angle 1$ زاويتان متناظرتان
$j \perp k$	تعريف التعامد

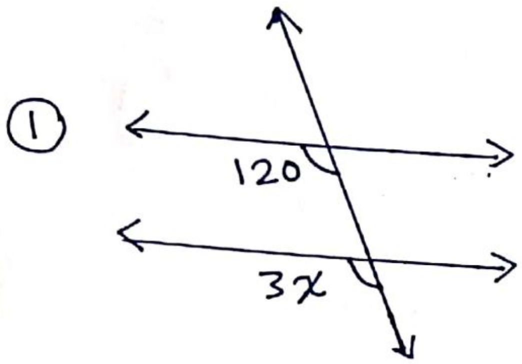


حل آخر

العبارات	المبررات
$\angle 1 = 90$	$j \perp h$
$\angle 1 \cong \angle 2$	$k \parallel h$
$j \perp k$	$\angle 2 = 90$

جد قيمة x التي تجعل
$m \parallel n$ في كل مما يأتي :-

(1)



يكون المستقيمان $m \parallel n$
متوازيين اذا كانت الزاويتان
المتناظرتان متطابقتين :-

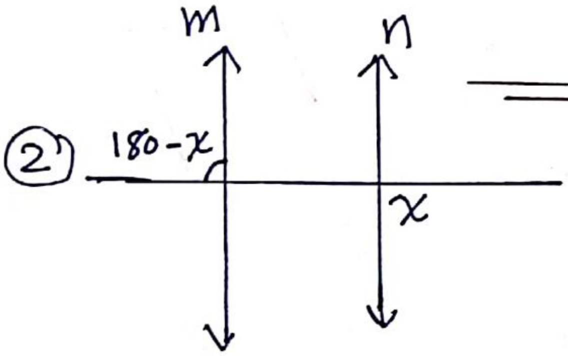
نشكل معادلة $3x = 120$

حل المعادلة $\frac{3x}{3} = \frac{120}{3}$

$x = 40$

---

(2)



يكون المستقيمان $m \parallel n$
متوازيين اذا كانت الزاويتان
المتبادلتان خارجيًا متطابقتين

نشكل معادلة $180 - \cancel{x} = x$

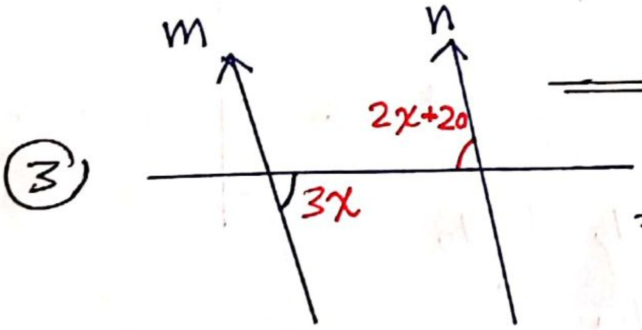
$\cancel{+x} \quad +x$

$\frac{180}{2} = \frac{2x}{2}$

$x = 90°$

---

(3)



يكون المستقيمان $m \parallel n$ متوازيين
اذا كانت الزاويتان المتبادلتان داخليًا متطابقة

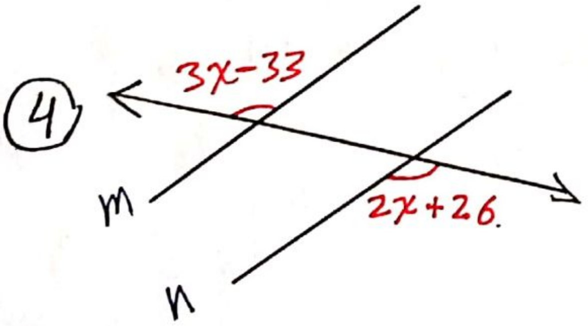
$3x = 2\cancel{x} + 20$

$-2x \quad \cancel{-2x}$

$x = 20$

---

(4)



يكون المستقيمان $m \parallel n$ متوازيين
اذا كانت الزاويتان المتبادلتان خارجيًا متطابقة

$3x - 33 = 2x + 26$

$-2x \quad -2x$

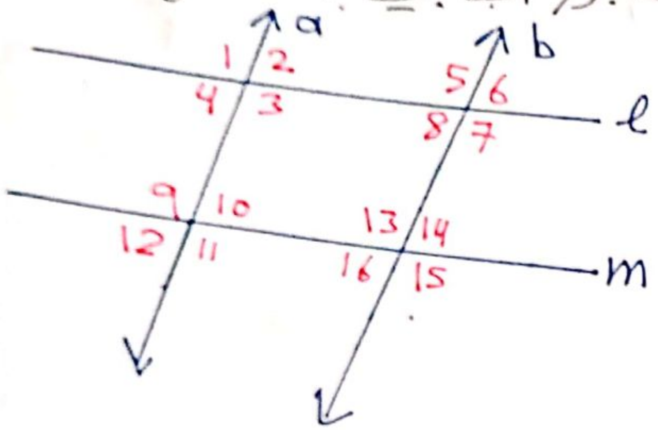
$x - 33 = 26$

$+33 \quad +33$

$x = 59$

(9)

هل يمكن اثبات ان أياً من مستقيمات الشكل المجاور متوازية اعتماداً على المعطيات في كل مما يأتي ؟ ابرر اجابتي باستعمال مسلمة أو نظرية



⑤ $\angle 2 \cong \angle 8$

الحل :-
$\angle 2$ و $\angle 8$ متبادلتان داخلياً
بالنسبة للمستقيمين a و b
وبما أن $\angle 2 = \angle 8$ فان
$a \parallel b$

⑥ $\angle 9 \cong \angle 15$

الحل :-
$\angle 15$ و $\angle 9$ متبادلتان خارجياً
بالنسبة للمستقيمين a و b
وبما أن $\angle 9 \cong \angle 15$ فان
$a \parallel b$

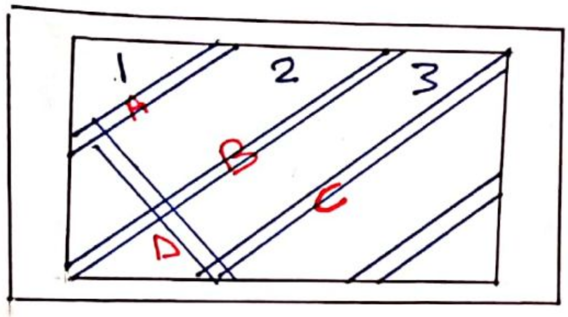
⑦ $\angle 6 \cong \angle 16$

الحل :-
$\angle 16$ و $\angle 6$ متبادلتان خارجياً
بالنسبة للمستقيمين l و m
وبما أن $\angle 6 \cong \angle 16$ فان
$m \parallel l$

⑧ $m\angle 10 + m\angle 13 = 180$

الحل :- $\angle 10$ و $\angle 13$ متحالفتان بالنسبة
للمستقيمين a و b وبما ان
$m\angle 10 + m\angle 13 = 180$ فان
$a \parallel b$

عريش خشبي :- صمم نجار عريشاً خشبياً خاصاً بنمو النباتات المتسلقة يتكون من قطع خشبية مرتبة بشكل قطري



(9) يحتاج النجار الى أن تكون القطع الخشبية A و B و C متوازية فكيف يحقق ذلك من خلال $\angle 1$ و $\angle 2$ و $\angle 3$

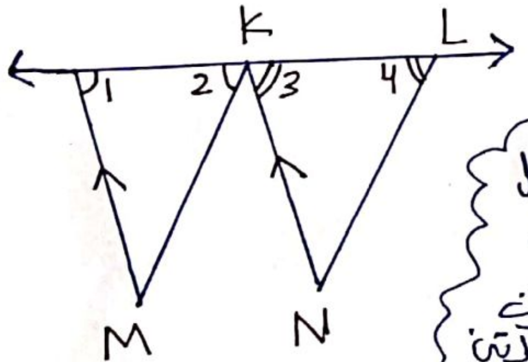
الحل :- الزوايا الثلاث متناظرة وعليه يصمم العريش بحيث تكون قياسات الزوايا 1 و 2 و 3 متساوية.

(10) وصل النجار القطعة الخشبية D بحيث تكون عمودية على القطعة الخشبية A ، فهل القطعة D عمودية على القطعتين B و C علماً بان النجار جعل القطع الخشبية A و B و C متوازية

الحل :- نعم ، لان المستقيم العمودي على مستقيم يكون عمودياً على كل المستقيمات التي توازيه
" نظرية القاطع العمودي "

---

(11) استعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي ، لاثبت ان $\overline{KM} \parallel \overline{LN}$ باستعمال البرهان ذي العمودين

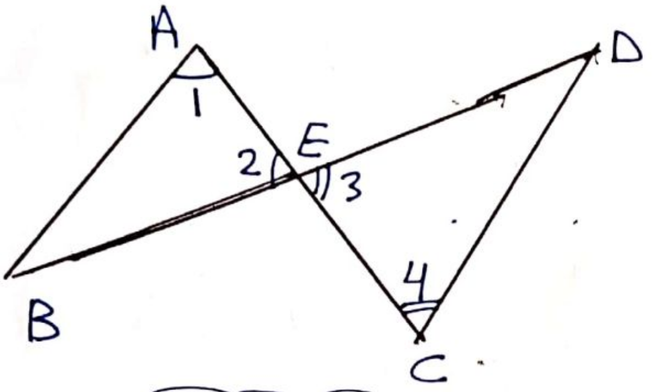


فكرة الحل هو البحث عن زاويتين متناظرتين متطابقتين

الحل :-

العبارات	المبررات
$JM \parallel KN$	معطى بالرسم
$\angle 3 \cong \angle 4$ و $\angle 1 \cong \angle 2$	معطى بالرسم
$\angle 1 \cong \angle 3$	زاويتان متناظرتان
$\angle 1 \cong \angle 4$	نتيجة
$\angle 2 \cong \angle 4$	نتيجة
$KM \parallel LN$	$\angle 2$ و $\angle 4$ متناظرتان

(12) في الشكل الآتي ، اذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle 3 \cong \angle 4$ فأثبت ان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ باستعمال البرهان السهمي



فكرة السؤال هو البحث عن زاويتين متبادلتين داخلياً متطابقة

الحل:

$\boxed{\angle 1 \cong \angle 2}$ معطى

$\boxed{\angle 3 \cong \angle 4}$ معطى

$\boxed{\angle 2 = \angle 3}$ تقابل بالرأس

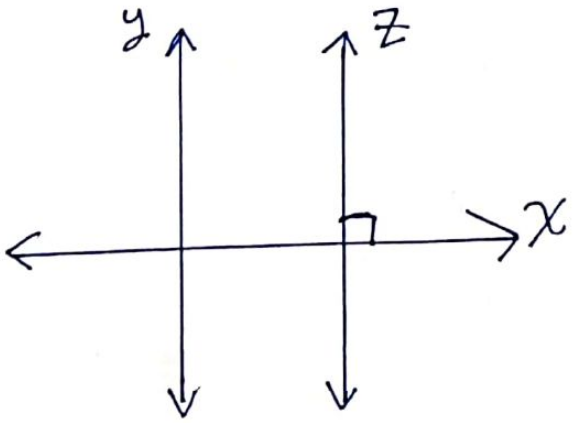
$\angle 1 \cong \angle 4 \rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

نتيجة

عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

---

(13) اكتشف الخطأ :- يقول زياد بما أن $x \perp z$ فان $y \parallel z$ في الشكل الآتي حسب نظرية عكس القاطع العمودي ، اكتشف الخطأ في ما يقوله زياد واصححه.



الحل :-

الخطأ لم يعطي $x \perp y$

اذا اعطى هذا الشرط

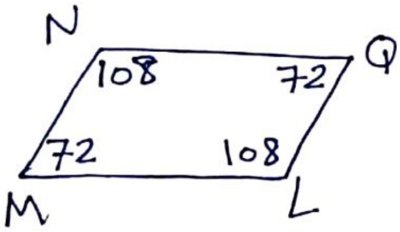
تكون $y \parallel z$ فحسب

نظرية عكس القاطع العمودي

تحدٍّ: أحدد المستقيمات المتوازية في الشكل الرباعي QLMN في كل مما يأتي مبرراً اجابتي:

(14) $m\angle Q = 72°$ و $m\angle L = 108$ و $m\angle M = 72$ و $m\angle N = 108$

الحل:- رسم توضيحي فقط



نقوم بالترتيب مع أو عكس عقارب الساعة

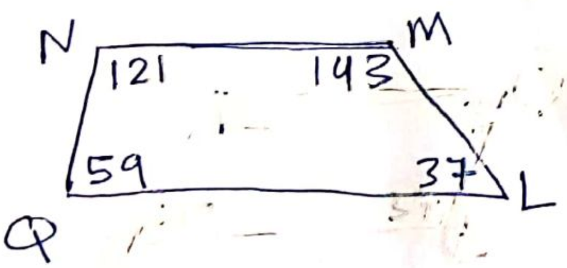
$m\angle N + m\angle M = 180$

بما أن $\angle N$ و $\angle M$ متحالفتان وعليه $\overline{NQ} \parallel \overline{ML}$

وايضاً $m\angle M + m\angle L = 180$

وبما ان $\angle N$ و $\angle M$ متحالفتان وعليه $\overleftrightarrow{NM} \parallel \overleftrightarrow{QL}$

(15) $m\angle Q = 59°$ و $m\angle L = 37°$ و $m\angle M = 143$ و $m\angle N = 121$



الحل: رسم توضيحي فقط

$m\angle Q + m\angle N = 180$

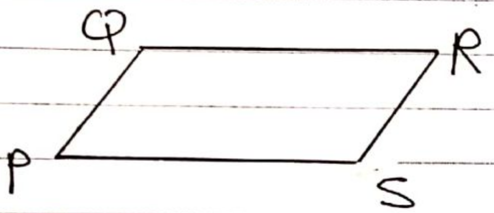
بما ان $\angle N$ و $\angle Q$ متحالفتان فعليه $\overline{NM} \parallel \overline{QL}$

متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع :- هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان ويرمز له بالرمز ▱

ففي ▱ QRSP المبين جانباً بحسب التعريف :-

$\overline{QR} \parallel \overline{PS}$ و $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$



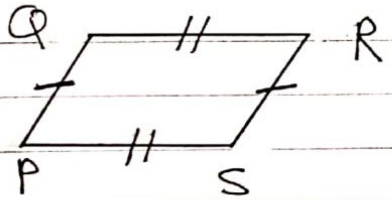
نظريات

* نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع *

اذا كان الشكل الرباعي متوازي اضلاع ، فان الأضلاع المتقابلة متطابقة.

$\overline{PQ} \cong \overline{SR}$

$\overline{QR} \cong \overline{PS}$

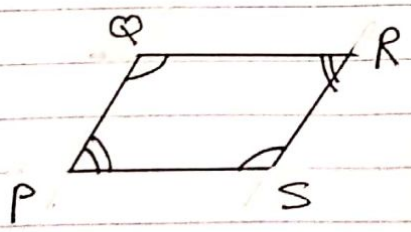


* نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع *

اذا كان الشكل الرباعي متوازي اضلاع ، فان الزوايا المتقابلة متطابقة

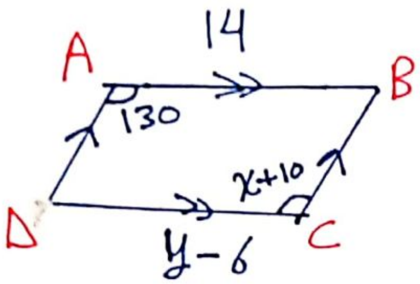
$\angle P \cong \angle R$

$\angle Q \cong \angle S$



مثال

جد قيمة x و y في الشكل المجاور :-



الحل :- كل ضلعين متقابلين متوازيين فعليه الشكل الرباعي متوازي اضلاع

كل ضلعين متقابلين متطابقين

$y-6=14$ شكل معادلة

حل المعادلة

$y-\cancel{6}=14$

$\cancel{+6} \quad +6$

$y=20$

كل زاويتين متقابلتين متطابقتين

$x+10=130$ شكل معادلة

حل المعادلة

$x+\cancel{10}=130$

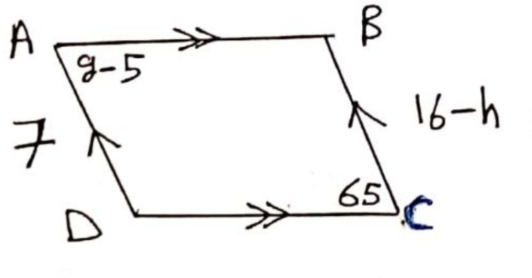
$\cancel{-10} \quad -10$

$x=120$

جد قيمة كل من g و h في الشكل المجاور

التحقق من فهمك

78 ص



الحل :- الشكل متوازي اضلاع لان فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

* كل ضلعين متقابلين متطابقين

$16-h=7$ شكل معادلة

حل المعادلة

$\cancel{16}-h=7$

$\cancel{-16} \quad -16$

$-h=-9$

$\boxed{h=9}$

* كل زاويتين متقابلتين متطابقتين

$g-5=65$ شكل معادلة

حل المعادلة

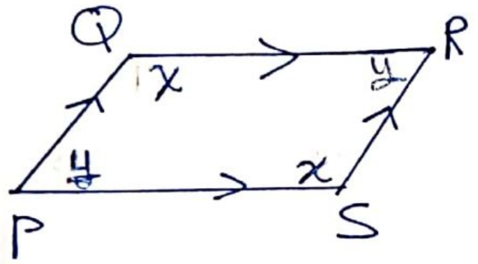
$g-\cancel{5}=65$

$\cancel{+5} \quad +5$

$\boxed{g=70}$

* نظرية الزوايا المتحالفة في متوازي الاضلاع *

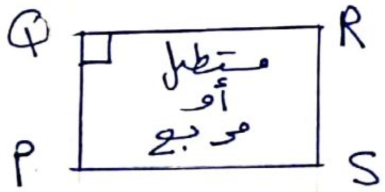
اذا كان الشكل الرباعي متوازي اضلاع ، فان كل زاويتين متحالفتين متكاملتان .



$$x + y = 180$$

* نظرية الزاوية القائمة في متوازي الاضلاع *

اذا كانت احدى زوايا متوازي الاضلاع قائمة فان زواياه الاربع قوائم .

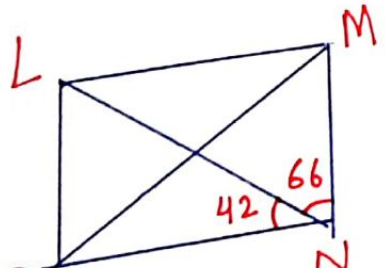


اذا كانت $\angle Q$ قائمة فان :-

$\angle P$ ، $\angle S$ ، $\angle R$ قوائم ايضاً

مثال

في الشكل المجاور ، اذا كان $LMNP$ متوازي اضلاع فاجد $m\angle PLM$ و $m\angle LMN$



الحل :- $m\angle MNP = 66+42 = 108$

الزوايا المتقابلة متطابقة

$$m\angle PLM = m\angle MNP$$
$$= 108^\circ$$

تحالف في متوازي اضلاع

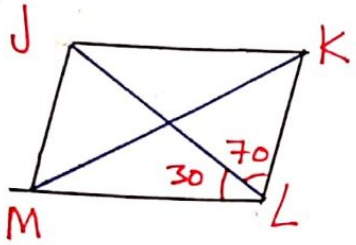
$$m\angle MNP + m\angle LMN = 180$$

$$\cancel{108} \cancel{+} m\angle LMN = 180$$
$$\cancel{-108} \qquad\qquad -108$$

$$m\angle LMN = 72$$

التحقق من فهمي

في الشكل المجاور، اذا كان JKLM متوازي اضلاع، جد $m\angle MJK$ و $m\angle JKL$



الحل :-

$$m\angle KLM = 70+30 = 100$$

بما أن الشكل متوازي اضلاع فإن كل زاويتين متقابلتين متطابقتين :.

$$m\angle MJK = m\angle KLM = 100$$

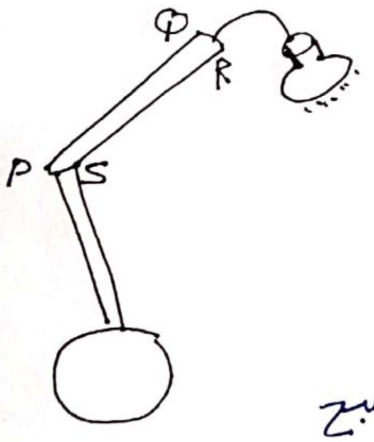
$$m\angle KLM + m\angle JKL = 180$$

زاويتين متتالفتان في متوازي اضلاع

$$\cancel{100} + m\angle JKL = 180$$
$$\cancel{-100} \qquad -100$$
$$m\angle JKL = 80$$

مسائل من الحياة

اضاءة :- يبين الشكل المجاور جزءاً من مصباح مكتب على شكل متوازي اضلاع، وتتغير زواياه عند رفعه وخفضه. أجد $m\angle QRS$ اذا علمت أن $m\angle PSR = 100$



الحل :-

$$m\angle QRS + m\angle PSR = 180$$
$$m\angle QRS + \cancel{100} = 180$$
$$\cancel{-100} \quad -100$$
$$m\angle QRS = 80^\circ$$

زاويتان متتالفتان في متوازي الاضلاع

التحقق من فهمي

افترضنا أن مصباح المكتب عدّل لتصبح $m\angle PSR = 86$ جد $m\angle QRS$

80 ص

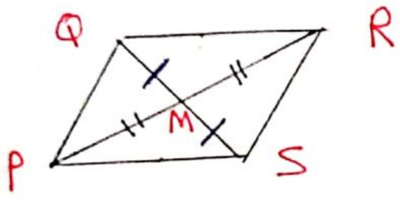
$$m\angle PSR + m\angle QRS = 180$$
$$\cancel{86} + m\angle QRS = 180$$
$$\cancel{-86} \qquad -86$$
$$m\angle QRS = 94^\circ$$

زاويتان متتالفتان في متوازي الاضلاع

نظريات | قطرا متوازي الاضلاع

* نظرية قطري متوازي الاضلاع *

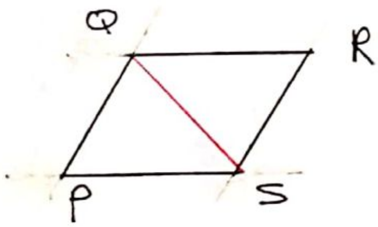
اذا كان الشكل الرباعي متوازي اضلاع فان قطريه ينصف كل منهما الآخر



$\overline{QM} \cong \overline{SM}$, $\overline{PM} \cong \overline{RM}$

* نظرية قطر متوازي الاضلاع *

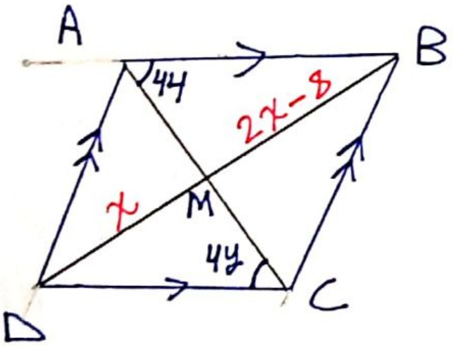
اذا كان الشكل الرباعي متوازي اضلاع فان كل قطر يقسمه الى مثلثين متطابقين



$\triangle PQS \cong \triangle RSQ$

مثال

اذا كان ABCD متوازي اضلاع ، فاجد قيمة كل من x و y



الحل: قطرا متوازي الاضلاع ينصف كل منهما الآخر:

$\overline{DM} \cong \overline{BM}$

$\cancel{x} = 2x - 8$

$\cancel{-x} \quad -x$

$0 = x - \cancel{8}$

$+8 \quad \cancel{+8}$

$\boxed{x = 8}$

قطر متوازي الاضلاع يقسمه الى مثلثين متطابقين

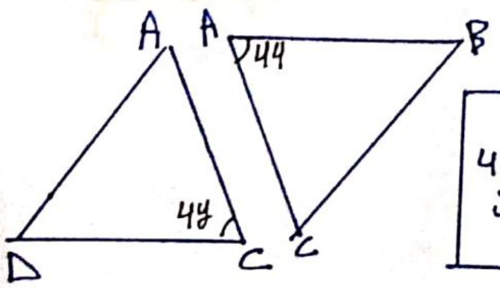
$\triangle DAC \cong \triangle BCA$

$4y = 44$

$\frac{4y}{4} = \frac{44}{4}$

$\boxed{y = 11}$

وحسب تعريف التطابق فان الزوايا المتناظرة متطابقة

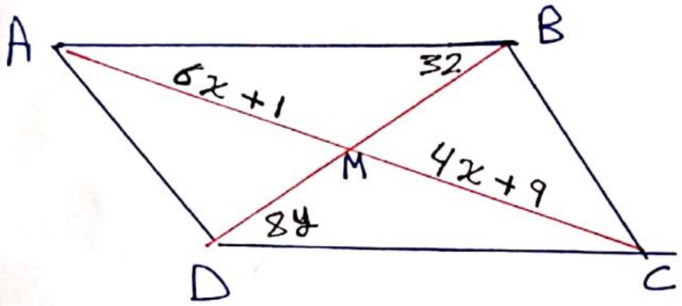


حل آخر
$4y = 44$
زاويتان متبادلتان

تحقق من فهمك

ص 81

اذا كان ABCD متوازي اضلاع ، فاجد قيمة كل من x و y



الحل: قطرا متوازي الاضلاع ينصف كل منهما الآخر

$\overline{AM} \cong \overline{MC}$

$6x+1 = 4x+9$

$-4x \qquad -4x$

$2x+1 = 9$

$-1 \qquad -1$

$2x = 8$

$\boxed{x = 4}$

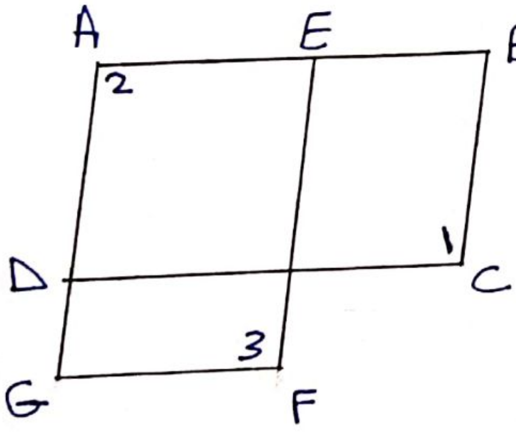
زاويتان متبادلتان $8y = 32$

$\frac{8y}{8} = \frac{32}{8}$

$y = 4$

---

* يمكن استعمال خصائص متوازي الاضلاع لبرهنة علاقات في اشكال هندسية مركبة

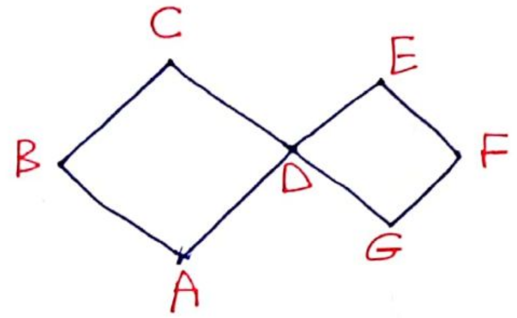


مثال: في الشكل المجاور ، اذا كان ABCD, AEFG متوازيي اضلاع ، فاثبت ان :- $\angle 1 \cong \angle 3$ باستعمال البرهان ذي العمودين

المبررات	العبارات
1) معطى	1) ABCD و AEFG متوازيا اضلاع
2) الزوايا المتقابلة في متوازي الاضلاع متطابقة	2) $\angle 1 \cong \angle 2$
3) الزوايا المتقابلة في متوازي الاضلاع متطابقة	3) $\angle 2 \cong \angle 3$
4) بما أن $\angle 1 \cong \angle 2$، $\angle 2 \cong \angle 3$	4 $\angle 1 \cong \angle 3$

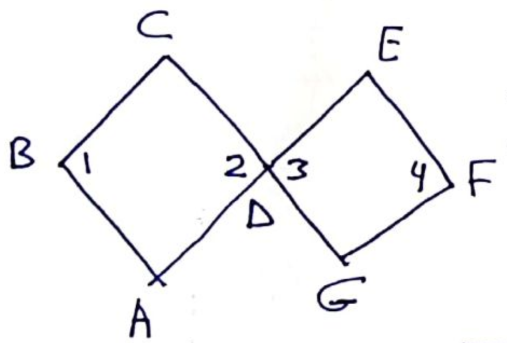
التحقق من فهمي

في الشكل المجاور/ اذا كان ABCD و GDEF متوازيي اضلاع ، اثبت ان $\angle B \cong \angle F$ باستعمال البرهان العمودي



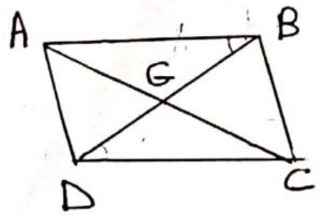
الحل :-

العبارات	المبررات
1) GDEF ، ABCD متوازيي اضلاع	1) معطى
2) $\angle 1 \cong \angle 2$	زوايا متقابلة في متوازي اضلاع متطابقة
3) $\angle 3 \cong \angle 4$	زوايا متقابلة في متوازي اضلاع متطابقة
4) $\angle 2 \cong \angle 3$	تقابل بالرأس
5) $\angle 1 \cong \angle 4$	$\angle 1 \cong \angle 2$ ، $\angle 2 \cong \angle 3$ ، $\angle 3 \cong \angle 4$



اكمل كل جملة مما يأتي في ما يتعلق بـ ABCD ▭ مبرراً اجابتي

التدرب وحل المسائل
ص 82



① $\angle DAB \cong$ $\underline{\angle BCD}$

" كل زاويتين متقابلتين متطابقتين "

② $\angle ABD \cong$ $\underline{\angle CDB}$

" قطر متوازي الاضلاع يقسمه الى مثلثين متطابقين "

③ $\overline{AB} \parallel$ $\underline{\overline{DC}}$

" كل ضلعين متقابلين متوازيين "

④ $\overline{BC} \parallel$ $\underline{\overline{AD}}$

" كل ضلعين متقابلين متوازيين "

⑤ $\triangle ABD \cong$ $\underline{\triangle CDB}$

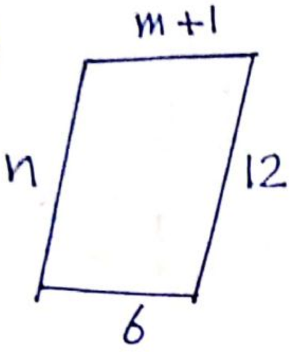
" قطر متوازي الاضلاع يقسمه الى مثلثين متطابقين "

⑥ $\triangle ACD \cong$ $\underline{\triangle CAB}$

" قطر متوازي الاضلاع يقسمه الى مثلثين متطابقين "

جد قيمة كل متغير في كل من متوازيات الأضلاع الآتية:

(7)



الحل: كل ضلعين متقابلين متطابقين

$m+\cancel{1} = 6$

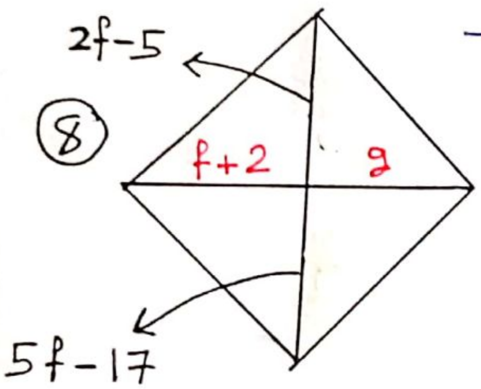
$\quad -1 \quad -1$

$\boxed{m=5}$

$\boxed{n=12}$

---

(8)



الحل: قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر

الحل: $5f-17 = \cancel{2f}-5$

$-2f \quad \cancel{-2f}$

$3f-\cancel{17} = -5$

$\cancel{+17} \quad +17$

$\frac{3f}{3} = \frac{12}{3}$

$\boxed{f=4}$

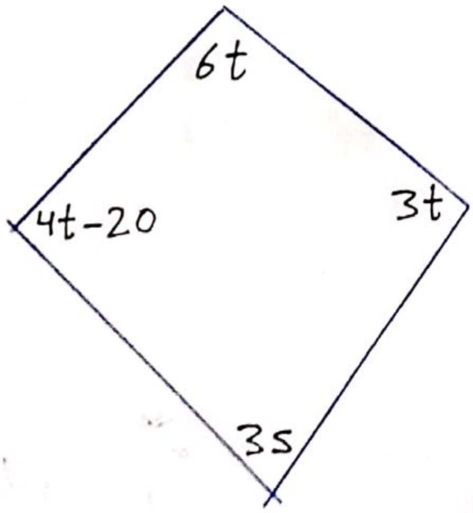
$f=4$ عوض $f+2=g$

$4+2=g$

$\boxed{g=6}$

---

(9)



كل زاويتين متقابلتين متطابقتان

$4t-20 = \cancel{3t}$

$-3t \quad \cancel{-3t}$

$t-\cancel{20} = 0$

$\cancel{+20} \quad +20$

$\boxed{t=20}$

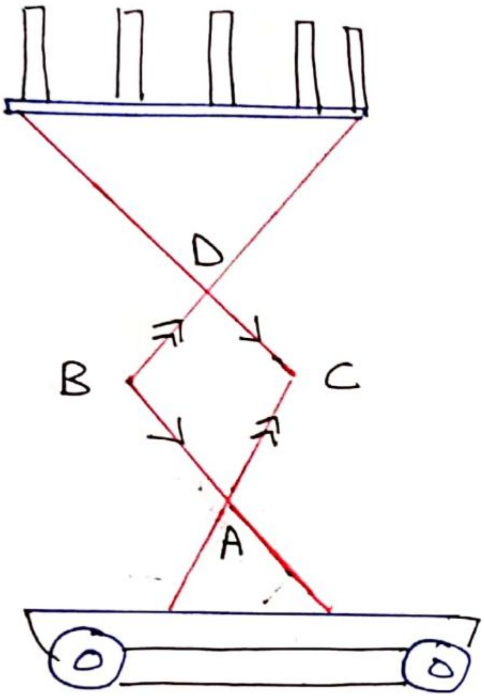
$t=20$ عوض $3s = 6t$

$3s = 6\times 20$

$\frac{\cancel{3}s}{\cancel{3}} = \frac{120}{3}$

$\boxed{s=40}$

رافعة :- استعمل الشكل المجاور الذي يبين رافعة المقص للإجابة عن الأسئلة الآتية :-



(10) اذا كان $m\angle A=120$ فاجد $m\angle B$

الحل :-

متحالفتان في متوازي اضلاع

$$m\angle A + m\angle B = 180$$

$$\cancel{120} + m\angle B = 180$$

$$-\cancel{120} \qquad -120$$

$$m\angle B = 60$$

---

(11) اذا قل $m\angle A$ فما تأثير ذلك في $m\angle B$

الحل :- قياس زاوية B تزداد لكي تبقى مجموعهما 180°

---

(12) اذا قل $m\angle A$ فما تأثير ذلك في طول $\overline{AD}$

الحل :- يزيد

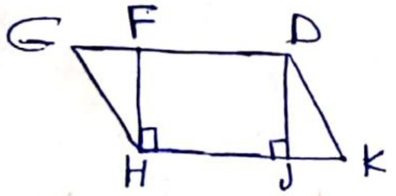
---

(13) اذا قل $m\angle A$ فما تأثير ذلك في ارتفاع الرافعة.

الحل :- يزيد

---

(14) في الشكل الآتي، اذا كان GDKH متوازي اضلاع، فاستعمل المعلومات المعطاه على الشكل، لتثبت ان :- $\Delta DJK \cong \Delta HFG$ باستعمال البرهان ذي العمودين

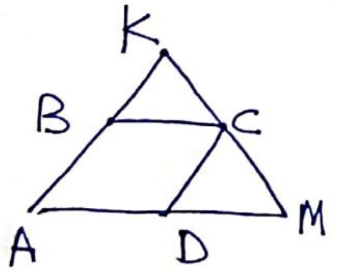


الحل :-

العبارات	المبررات
① $\overline{GH} \cong \overline{DK}$	ضلعان متقابلان في متوازي اضلاع
② $\angle K \cong \angle G$	زاويتان متقابلتان في متوازي اضلاع
③ $\angle DJK \cong \angle HFG$ زاويتان قائمتان	$\angle DJK$ معطى، $\angle HFG$ تحالف الزاوية القائمة FHJ في متوازي الاضلاع
④ $\Delta DJK \cong \Delta HFG$	④ AAS

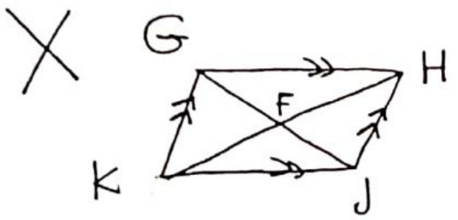
تذكيرة: حالات تطابق المثلثات
① تطابق 3 أضلاع (SSS)
② تطابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما (SAS)
③ تطابق وتر وساق في مثلث قائم الزاوية (HL)
④ تطابق زاويتان وضلع محصور بينهما (ASA)
⑤ تطابق زاويتان وضلع غير محصور بينهما (AAS)

(15) في الشكل الآتي، اذا كان ABCD متوازي اضلاع، $\overline{AK} \cong \overline{MK}$ فاثبت ان $\angle BCD \cong \angle CMD$ باستعمال البرهان ذي العمودين



العبارات	المبررات
① ΔAKM متطابق الضلعين	① $\overline{AK} \cong \overline{MK}$ معطى
② $\angle A \cong \angle BCD$	② زاويتان متقابلتان في متوازي اضلاع
③ $\angle A \cong \angle CMD$	③ زاويتا قاعدة في مثلث متطابق الضلعين
④ $\angle BCD \cong \angle CMD$	④ نتيجة

(16) اكتشف الخطأ :- انظر الحل الآتي ، واكتشف الخطأ الوارد فيه وأصححه :-



بما أن GHJK متوازي أضلاع ، فإن $\overline{GF} \cong \overline{FH}$

الصواب

الحل الموجود نفترض أن قطري متوازي الأضلاع متطابقان هذا ليس من خصائص متوازي الأضلاع.

التصحيح :- $\overline{GF} \cong \overline{JF}$

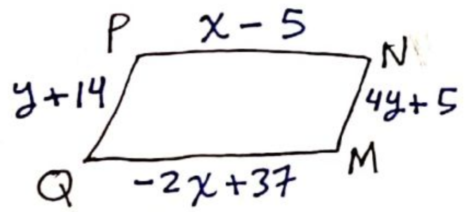
---

(17) تبرير :- تمثل المقادير الجبرية أدناه أطوال أضلاع MNPQ ▱ ، جد محيط متوازي الأضلاع. مبرراً إجابتك

$MQ = -2x + 37$ $\quad QP = y + 14$ $\quad NP = x - 5$ $\quad MN = 4y + 5$

الحل :-

رسم توضيحي



كل ضلعين متقابلين متطابقين :-

$4y + 5 = \cancel{y} + 14$

$-y \qquad \cancel{-y}$

$3y + \cancel{5} = 14$

$\cancel{-5} \qquad -5$

$\frac{3y}{3} = \frac{9}{3}$

$\boxed{y = 3}$

$x - 5 = -\cancel{2x} + 37$

$+2x \qquad \cancel{+2x}$

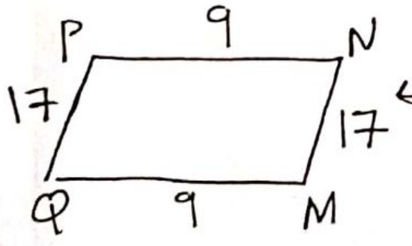
$3x - 5 = 37$

$+5 \qquad +5$

$\frac{3x}{3} = \frac{42}{3}$

$\boxed{x = 14}$

نعوض قيم y و x في أضلاع المتوازي



محيط المستطيل :-

$C = 2 \times 9 + 2 \times 17$

$C = 18 + 34$

$= 52$

الدرس (3) الوحدة (7)

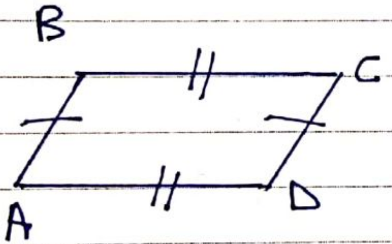
تمييز متوازي الأضلاع

تعلمت في الدرس السابق نظريات حول خصائص متوازي الأضلاع وسأتعلم في هذا الدرس عكس هذه النظريات ، بحيث يمكن تحديد ما اذا كان الشكل الرباعي متوازي اضلاع أم لا اذا كانت اضلاعه وزواياه واقطاره لها خصائص معينة

مفهوم أساسي

* عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع *

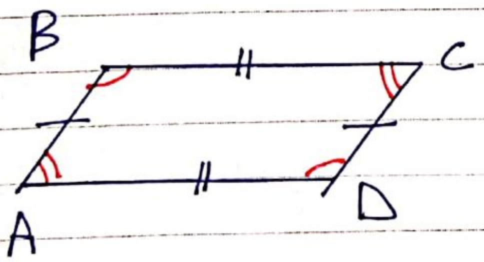
اذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين في الشكل الرباعي ، فان الشكل الرباعي متوازي اضلاع



اذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
فان ABCD متوازي اضلاع

* عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع *

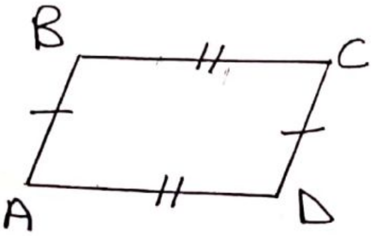
اذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتان في الشكل الرباعي فان الشكل الرباعي متوازي اضلاع.



اذا كان $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$
فان الشكل الرباعي ABCD
متوازي اضلاع

برهان النظرية "عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الاضلاع"

في الشكل المجاور ، اذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ ، فاثبت ان ABCD متوازي أضلاع باستعمال البرهان ذي العمودين



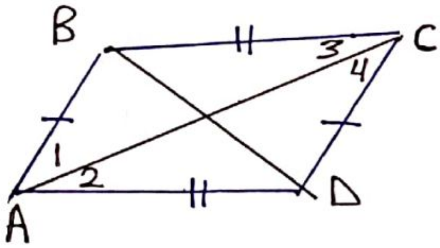
اخطط للبرهان باتباع الخطوات الآتية

خطوة (1) :- ارسم القطر $\overline{AC}$ لينتج $\triangle ABC$ و $\triangle CDA$

خطوة (2) :- استعمل حالة تطابق مثلثين ثلاثة اضلاع (SSS) لاثبت ان

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$

خطوة (3) :- استعمل الزوايا المتبادلة داخلياً ، لاثبت ان الاضلاع المتقابلة متوازية



العبارات	المبررات
1) $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ ، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	1) معطى
2) $\overline{AC}$	2) ضلع مشترك
3) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	3) SSS
4) $\angle 1 \cong \angle 4$ ، $\angle 3 \cong \angle 2$	4) زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين
5) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$	5) عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليا
6) ABCD متوازي اضلاع	6) تعريف متوازي الاضلاع

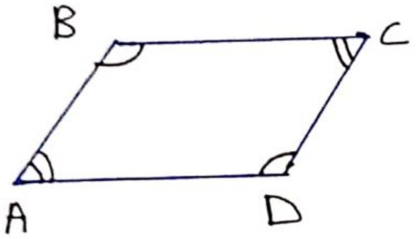
التحقق من فهمنا

85

UP

في الشكل المجاور ، اذا كان $\angle B \cong \angle D$ و $\angle A \cong \angle C$

فاثبت ان ABCD متوازي اضلاع



اثبات عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الاضلاع

الحل :-

معطى $\angle A \cong \angle C$

$\angle B = \angle D$

لكن مجموع زوايا الشكل الرباعي 360

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360$$

نقسم على 2

$$2m\angle A + 2m\angle B = 360$$

$$m\angle A + m\angle B = 180$$

وعليه $\angle A$ و $\angle B$ متحالفتان ومجموع قياسهما 180

وحسب عكس نظرية التحالف فان $BC \parallel AD$

وبالمثل نتبع نفس الطريقة حيث نستبدل $m\angle A$ بـ $m\angle C$

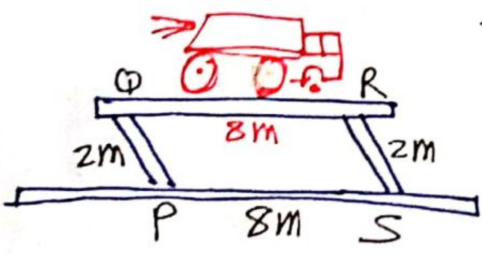
واستبدال $m\angle B$ بـ $m\angle D$ وينتج $\angle C$ و $\angle D$

متحالفتان مجموع قياسهما 180 وحسب عكس نظرية التحالف فان $AB \parallel CD$ وعليه الشكل الرباعي متوازي اضلاع.

مسائل من الحياة

مثال

رافعة :- يبين الشكل المجاور رافعة للمركبات الثقيلة



① هل الشكل الرباعي QRSP متوازي اضلاع

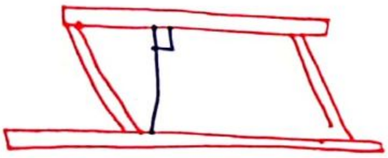
الحل :- بما أن كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي QRSP متطابقان ، فانه متوازي اضلاع

② هل الشاحنة موازية للأرض ، أبرر إجابتي

الحل :- بما أن QRSP متوازي أضلاع ، فإن $\overline{QR} \parallel \overline{PS}$
وبما أن $\overline{QR}$ يمثل المنصة التي تستقر عليها الشاحنة ، و $\overline{PS}$ يقع على الأرض فإن الشاحنة موازية للأرض

أتحقق من فهمي
ص 86

③ ما أقصى ارتفاع يمكن أن ترفع الرافعة الشاحنة إليه ؟ برر إجابتي



الحل :- 2 m لأن الضلع المائل PQ طوله 2m

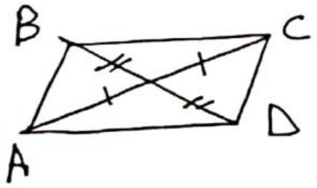
---

* عكس نظرية قطري متوازي الأضلاع *

مفهوم أساسي

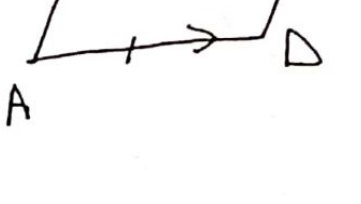
إذا كان قطرا شكل رباعي ينصف كل منهما الآخر ، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع

إذا كان $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ ينصف كل منهما الآخر فإن ABCD متوازي أضلاع



* نظرية الأضلاع المتوازية والمتطابقة *

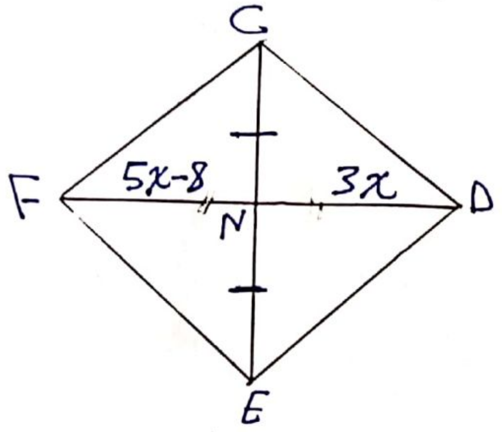
إذا توازى وتطابق ضلعان متقابلان في شكل رباعي ، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع



إذا كان $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
فإن ABCD متوازي أضلاع

* يمكن استعمال شروط متوازي الاضلاع لايجاد القيم المجهولة التي تجعل الشكل الرباعي متوازي اضلاع

مثال: جد قيمة x التي تجعل الشكل الرباعي FCDE المجاور متوازي اضلاع



الحل: بناءً على عكس نظرية قطري متوازي الاضلاع، وبما أنه معطى في الشكل $\overline{CN} \cong \overline{EN}$، فان قيمة x هي التي تجعل $\overline{FN} \cong \overline{DN}$

$FN = DN$

$5x - 8 = 3x$ تشكيل معادلة

حل المعادلة

$5x - 8 = \cancel{3x}$

$-3x \quad \cancel{-3x}$

$2x - \cancel{8} = 0$

$\cancel{+8} \quad +8$

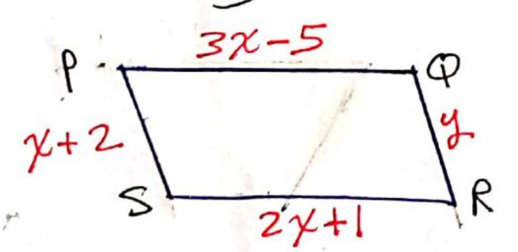
$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$

$\boxed{x = 4}$

رافت صافي
٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

جد قيمتي x و y اللتين تجعلان الشكل الرباعي PQRS المجاور متوازي اضلاع

التحقق من فهمك ص87



الحل: نجد x و y اللتين تجعلان كل ضلعين متقابلين متطابقين

حساب x	حساب y
$PQ = SR$	$QR = PS$
$3x - 5 = \cancel{2x} + 1$	$y = x + 2$
$-2x \quad \cancel{-2x}$	$y = 6 + 2$
$x - \cancel{5} = 1$	$\boxed{y = 8}$
$\cancel{+5} \quad +5$	
$\boxed{x = 6}$	

عوضا $x = 6$

ملخص المفهوم

* طريقة اثبات ان الشكل الرباعي متوازي اضلاع *

يكون الشكل الرباعي متوازي اذا حقق اياً من الشروط الآتية:

1) اذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين ((التعريف))
2) اذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متطابقين ((عكس نظرية الاضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع))
3) اذا كانت كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتين ((عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع))
4) اذا كان قطراه ينصف كل منهما الآخر ((عكس نظرية قطري متوازي الأضلاع))
5) اذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان ((نظرية الاضلاع المتوازية والمتطابقة))

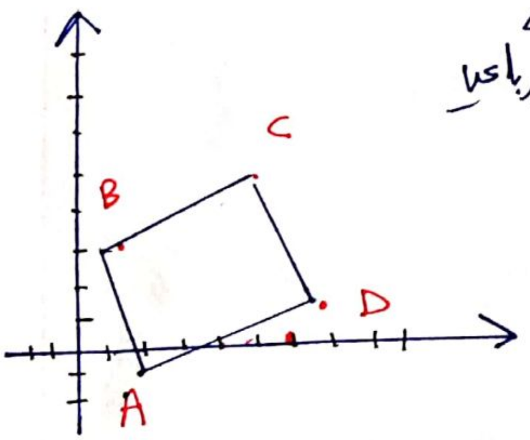
---

* يمكن استعمال الميل لتحديد ما اذا كان الشكل الرباعي في المستوى الاحداثي متوازي اضلاع أم لا

مثال

أثبت ان $A(2,-1)$ و $B(1,3)$ و $C(6,5)$ و $D(7,1)$ تمثل متوازي أضلاع

خطوة (1): امثل الشكل الرباعي في المستوى الاحداثي



خطوة (2): جد ميل كل ضلع من اضلاع الشكل الرباعي حسب القانون

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ميل $\overline{AB}$: $m=\frac{3--1}{1-2}=-4$

ميل $\overline{CD}$: $m=\frac{1-5}{7-6}=-4$

ميل $\overline{BC}$: $m=\frac{5-3}{6-1}=\frac{2}{5}$

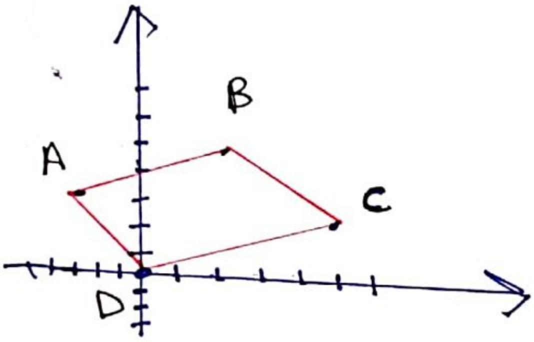
ميل $\overline{DA}$: $m=\frac{-1-1}{2-7}=\frac{2}{5}$

خطوة (3): نقارن ميل كل ضلعين متقابلين

بما ان كل ضلعين متقابلين لهما الميل نفسه فهما متوازيان وعليه الشكل متوازي اضلاع ((التعريف))

التحقق من فهمك ص88

أثبت أن $D(0,0)$ و $C(5,2)$ و $B(2,5)$ و $A(-3,3)$ تمثل رؤوس متوازي أضلاع.



الحل:- ميل $\overline{AB}$ ∴ $m = \frac{5-3}{2+3} = \frac{2}{5}$

ميل $\overline{BC}$ ∴ $m = \frac{2-5}{5-2} = \frac{-3}{3} = -1$

ميل $\overline{CD}$ ∴ $m = \frac{0-2}{0-5} = \frac{2}{5}$

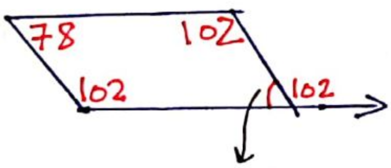
ميل $\overline{DA}$ ∴ $m = \frac{3-0}{-3-0} = -1$

بما أن كل ضلعين متقابلين لهما الميل نفسه ، فعليه كل ضلعين متقابلين متوازيين ، إذن الشكل الرباعي ABCD متوازي أضلاع

التدرب وحل المسائل ص88

أبين ما إذا كان كل شكل من الأشكال الرباعية الآتية متوازي أضلاع أم لا ، مبرراً إجابتي

(1)



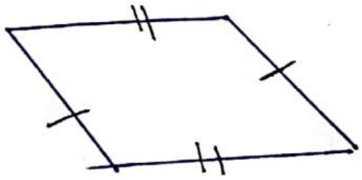
قياسها $180-102$ 78

كل زاويتين متقابلتين متطابقتين وعليه متوازي أضلاع

((عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع))

---

(2)

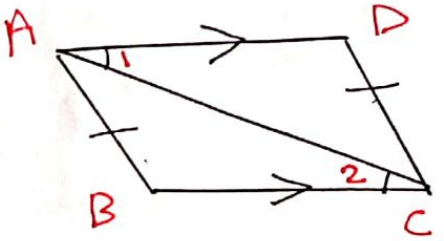


كل ضلعين متقابلين متطابقين وعليه متوازي أضلاع

((عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع))

---

(3)

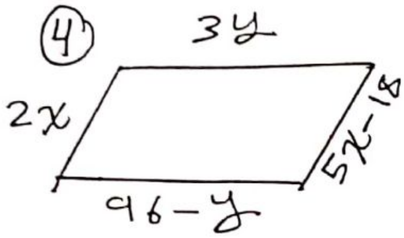


توجد زاويتان في وضع تبادل متطابقتين وعليه $\angle 1 \cong \angle 2$ فإن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ وبما أنهما متطابقتين $AB \cong CD$ وعليه الشكل متوازي أضلاع

((نظرية الأضلاع المتوازية والمتطابقة))

جد قيمة x و y اللتين تجعلان كل شكل رباعي مما يأتي متوازي اضلاع

4

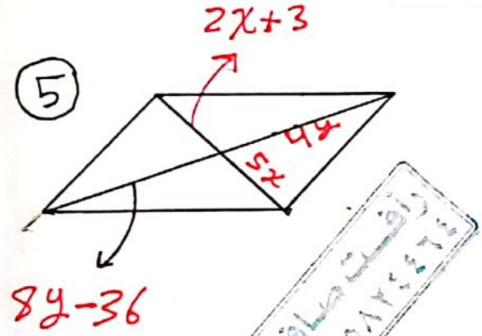


الحل :- كل ضلعين متقابلين متطابقان :-

$$3y = 96 - \cancel{y}$$
$$+y \qquad \cancel{+y}$$
$$\frac{4y}{4} = \frac{96}{4}$$
$$\boxed{y = 24}$$

$$5x - 18 = \cancel{2x}$$
$$-2x \qquad \cancel{-2x}$$
$$3x - \cancel{18} = 0$$
$$\cancel{+18} \qquad +18$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$$
$$\boxed{x = 6}$$

5

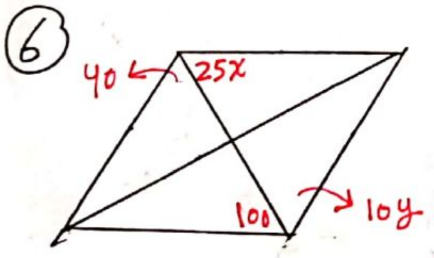


الحل :- انصاف الاقطار تنصف كل منها الآخر

$$5x = 2x + 3$$
$$-2x \qquad -2x$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$
$$\boxed{x = 1}$$

$$8y - 36 = \cancel{4y}$$
$$-4y \qquad \cancel{-4y}$$
$$4y - \cancel{36} = 0$$
$$\cancel{+36} \qquad +36$$
$$\frac{4y}{4} = \frac{36}{4}$$
$$\boxed{y = 9}$$

6



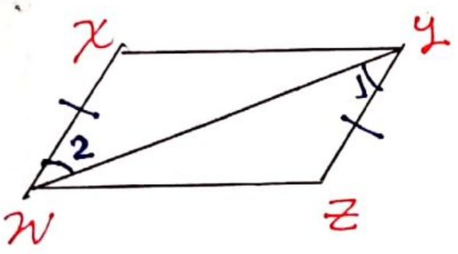
الحل :- الزوايا المتبادلة متطابقة ليصبح الشكل متوازي اضلاع

$$\frac{40}{10} = \frac{10y}{10}$$
$$\boxed{y = 4}$$

$$\frac{25x}{25} = \frac{100}{25}$$
$$\boxed{x = 4}$$

⑦ استعمل المعلومات المعطاه في الشكل الآتي لكتابة برهان سهمياً لاثبت ان الشكل الرباعي XYZW متوازي اضلاع

الحل :-

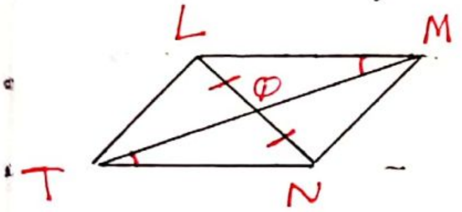


$\overline{WX} \cong \overline{YZ}$ (معطى) $\rightarrow$ XYZW متوازي اضلاع (نظرية الاضلاع المتوازية والمتطابقة)

$\angle XWY \cong \angle ZYW$ (معطى) $\rightarrow$ $\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$ (زاويتان متبادلتان داخلياً) $\rightarrow$ XYZW متوازي اضلاع

---

⑧ استعمل المعلومات المعطاه في الشكل الآتي: لكتابة برهان سهمياً لاثبت ان الشكل الرباعي LMNT متوازي اضلاع



$\overline{LQ} \cong \overline{NQ}$ (معطى)

$\angle LMQ \cong \angle NTQ$ (معطى)

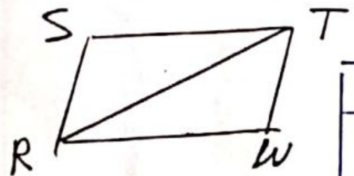
$\angle LQM \cong \angle NQT$ (متقابلتان بالرأس)

$\rightarrow$ $\Delta NQT \cong \Delta LQM$ (AAS) $\rightarrow$ $\overline{TQ} \cong \overline{MQ}$ (ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين) $\rightarrow$ LMNT متوازي اضلاع (شكل رباعي قطراه ينصف كل منهما الآخر)

$\overline{LQ} \cong \overline{NQ}$ $\rightarrow$ LMNT متوازي اضلاع

---

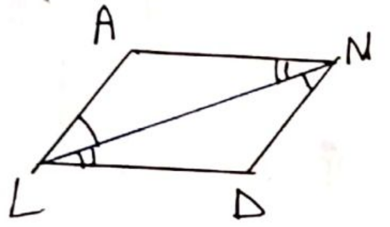
⑨ في الشكل الآتي ، اذا كان $\Delta TRS \cong \Delta RTW$ فأثبت ان RSTW متوازي اضلاع باستعمال البرهان ذي العمودين.



المبررات	العبارات
معطى	$\Delta TRS \cong \Delta RTW$
زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقين	$\angle STR \cong \angle WRT$
الزاويتان $\angle STR$ و $\angle WRT$ متطابقتان ومتبادلتان داخلياً	$\overline{ST} \parallel \overline{RW}$
ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين	$\overline{ST} \cong \overline{RW}$
شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان	ABCD متوازي اضلاع

⑨

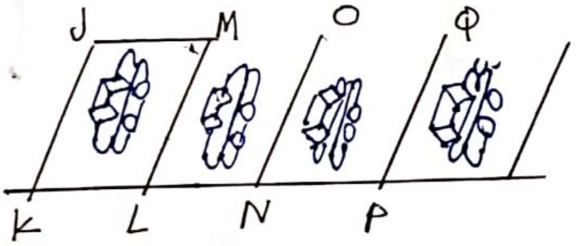
(١٥) استعمل المعلومات المعطاه في الشكل الآتي لكتابة برهان ذي العمودين لاثبت ان الشكل الرباعي ANDL متوازي اضلاع



العبارات	المبررات
$\angle ANL \cong \angle DLN$	معطى
$\overline{AN} \parallel \overline{DL}$	الزاويتان $\angle ANL$ و $\angle DLN$ متطابقتان ومتبادلتان داخلياً
$\angle ALN \cong \angle DNL$	معطى
$\overline{AL} \parallel \overline{DN}$	الزاويتان $\angle ALN$ و $\angle DNL$ متطابقتان ومتبادلتان داخلياً
ANDL متوازي اضلاع	تعريف متوازي الاضلاع

(١٥) موقف سيارات :- يبين الشكل المجاور موقفاً للسيارات. اذا كان

$m\angle JKL = 60$ و $JK = LM = 7m$ و $KL = JM = 3m$



(١١) هل الجزء من الموقف JKLM متوازي اضلاع؟ برر اجابتك

الحل: نعم ، لانه كل ضلعين متقابلين متطابقين

(عكس نظرية الاضلاع المتقابلة في متوازي الاضلاع)

(١٢) جد كلاً من

$m\angle KLM$ و $m\angle KJM$ و $m\angle JML$

الحل:

$m\angle KLM = 180 - 60 = 120$ " لانه $\angle JKL$ و $\angle KLM$ في وضع تحالف "

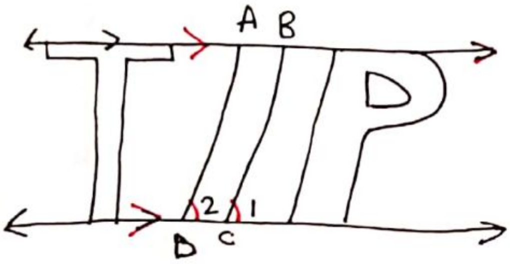
$m\angle KJM = 120$ " $\angle KJM$ تقابل $\angle KLM$ وهما متطابقتان ."

$m\angle JML = 60$ " تقابل الزاوية $\angle JKL$ "

(١٣) هل $\overline{JK} \parallel \overline{PQ}$ ؟ برر اجابتك

الحل: لا نستطيع الحكم على الاستقامة لعدم توفر كافي من الزوايا

حاسوب: تسمح معالجات نصوص حاسوبية عدة بكتابة الكلمة بالخط العادي أو الخط المائل، هل حرف I موازي أضلاع



الحل:- نعم ولأنه:-

$CD \parallel \overline{AB}$ معطى

$\angle 1 \cong \angle 2$ معطى وهما متناظرتين

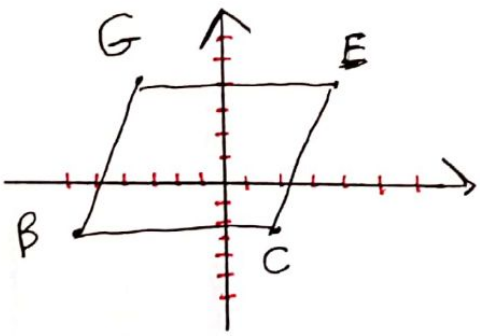
تناظر مقابله $AD \parallel BC$

«عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين»

وعليه كل ضلعين متقابلين متوازيين فإن حرف I متوازي أضلاع «تعريف»

امثل في المستوى الاحداثي الشكل الرباعي المعطاة احداثيات رؤوسه في ما يأتي، ثم حدد ما اذا كان متوازي أضلاع أم لا:

(15) $B(-6,-3)$ ، $C(2,-3)$ و $E(4,4)$ و $G(-4,4)$



الحل:- نجد الميل لكل ضلعين متقابلين

الضلع GE :- $m=\frac{4-4}{-4-4}=0$

الضلع BC :- $m=\frac{-3--3}{2--6}=0$

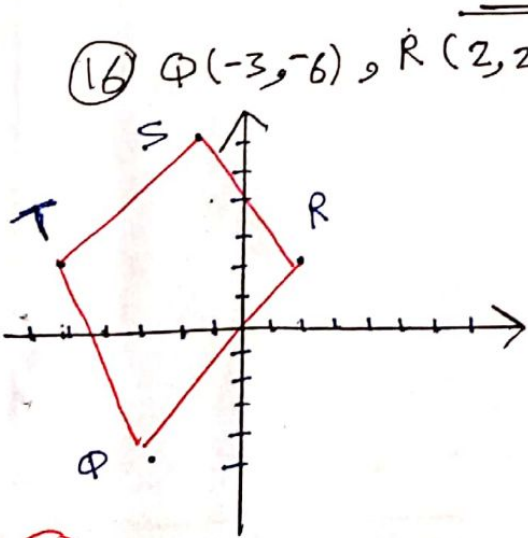
الضلع GB :- $m=\frac{4+3}{-4+6}=\frac{7}{2}$

الضلع EC :- $m=\frac{4+3}{4-2}=\frac{7}{2}$

كل ضلعين متقابلين متوازيان، الشكل متوازي اضلاع

---

(16) $Q(-3,-6)$ و $R(2,2)$ و $S(-1,6)$ و $T(-5,2)$



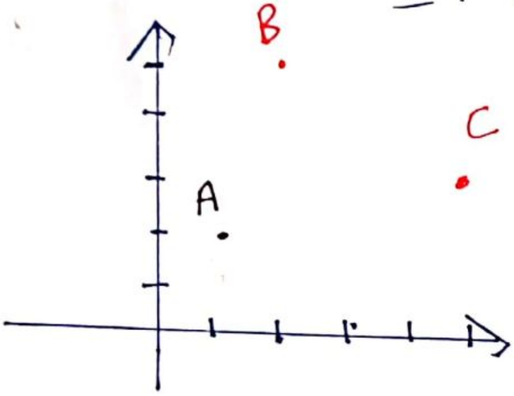
الضلع TS :- $m=\frac{2-6}{-5+1}=1$

QR :- $m=\frac{2+6}{2+3}=\frac{8}{5}$

هنا الضلعان المتقابلان غير متوازيان وعليه الشكل ليس متوازي اضلاع

(11)

تدريب :- تمثل النقاط A و B و C في المستوى الاحداثي المجاور رؤوس شكل رباعي ، جد احداثيات النقطة الرابعة في كل من الحالات الآتية ، مبرراً اجابتي



(17) النقطة D حيث ABCD متوازي اضلاع

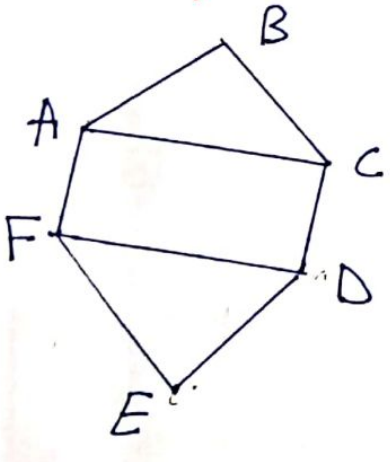
الحل :- نلاحظ انه اذا اردنا الوصول من A الى B فاننا ننزل 3 وحدات للاسفل ووحدة لليسار ، وبالمثل نصل عند C وتكون النقطة D احداثياتها (5 و 4)

((التحرك من A نعكس عكس الساعة))

(18) النقطة E حيث ABEC متوازي اضلاع

الحل: هنا عند التحرك من A إلى B يجب التحرك للاعلى ليصبح الشكل متوازي اضلاع ، حيث من A الى B تحركنا خطوة لليمين و 3 خطوات للاعلى وبالمثل نصل من النقطة C وتكون النقطة D احداثياتها (6 و 6)

(19) أثبت ان الشكل الرباعي FACD متوازي اضلاع علماً بان ABCDEF سداسي منتظم



الحل :-

$\overline{FA} \cong \overline{DC}$ ((اضلاع مضلع منتظم))

$\triangle ABC$ ، $\triangle FED$ فيهما :-

$\overline{AB} \cong \overline{FE}$ اضلاع منتظم

$\overline{BC} \cong \overline{ED}$ الاضلاع متطابقة

$\angle B \cong \angle E$ والزوايا متطابقة

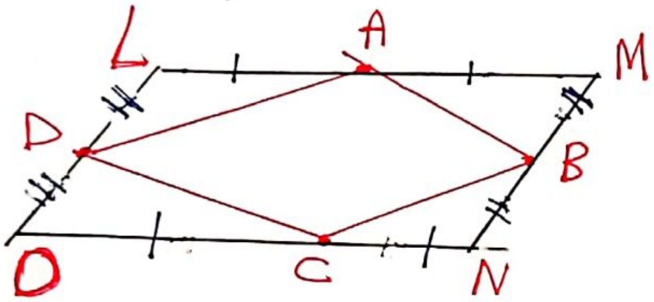
وعليه المثلثان متطابقان وعليه :-

$AC \cong FD$ ((ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين))

بما ان كل ضلعين متقابلين متطابقين فان الشكل الرباعي FACD متوازي اضلاع.

((عكس نظرية الاضلاع المتقابلة في متوازي اضلاع))

(20) تحدٍّ :- يبين الشكل المجاور متوازي الأضلاع LMNO
وتمثل النقاط D و C و B و A منتصفات أضلاعه
أثبت أن الشكل ABCD متوازي أضلاع



الحل :- بما أن LMNO متوازي أضلاع فإن كل ضلعين متقابلين متطابقان وبما أن A و B و C و D منتصفات الأضلاع فإن :-

$LA \cong AM \cong OC \cong CN$

$LD \cong DO \cong \overline{MB} \cong \overline{BN}$

نطابق المثلثان $\triangle AMB$ و $\triangle ODC$

$\overline{AM} \cong \overline{OC}$

$\overline{MB} \cong \overline{OD}$

$\angle M = \angle O$ متقابلتين في متوازي أضلاع

وعليه المثلثان متطابقان SAS

وينتج أن $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ضلعان متناظران في مثلثان متطابقين

وبالمثل نطابق المثلثان $\triangle CNB$ و $\triangle DLA$

وينتج $DA \cong CD$

وبما أن الشكل الرباعي ABCD فيه كل ضلعين متقابلين متطابقين وعليه الشكل الرباعي متوازي أضلاع

((عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع))

حالات خاصة من متوازي الأضلاع

تعرفت سابقاً خصائص متوازي الأضلاع المتعلقة بأضلاعه وزواياه وأقطاره ، وفي هذا الدرس ثلاثة أنواع خاصة من متوازي الأضلاع وهي : ((المستطيل والمعين والمربع))

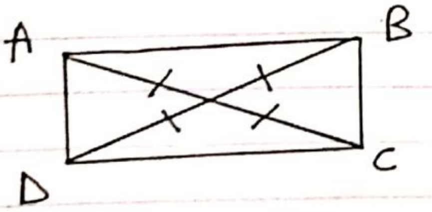
المستطيل: هو متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم ، وهذا يعني أن له الخصائص الآتية

* زواياه الأربع قوائم
* الأضلاع المتقابلة متوازية ومتطابقة
* الزوايا المتقابلة متطابقة
* الزوايا المتحالفة متكاملة
* قطراه ينصف كل منهما الآخر

وتضاف الى الخصائص السابقة خاصية أخرى متعلقة بقطري المستطيل موضحة في النظرية الآتية.

نظرية: نظرية قطري المستطيل

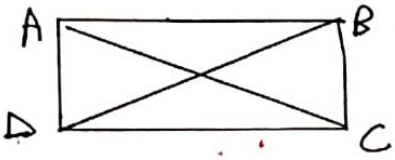
يكون متوازي الأضلاع مستطيلاً إذا وفقط إذا كان قطراه متطابقين



يكون ▱ABCD مستطيلاً إذا وفقط إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

إثبات النظرية

يبين الشكل المجاور المستطيل ABCD أثبت ان قطري المستطيل متطابقان باستعمال البرهان ذي العمودين .



اخطط للبرهان باتباع الخطوات الآتية :-

الخطوة (1) :- استعمل حالة تطابق مثلثين بضلعين وزاوية محصورة (SAS) لاثبت ان $\triangle ADC \cong \triangle BCD$

الخطوة (2) :- استعمل تطابق المثلثين لاثبت ان $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

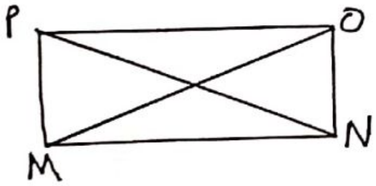
البرهان :-

العبارات	المبررات
1) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	1) ضلعان متقابلان في مستطيل
2) $\overline{DC}$	2) ضلع مشترك
3) $\angle D \cong \angle C$	3) زوايا المستطيل قوائم
4) $\triangle ADC \cong \triangle BCD$	4) SAS
5) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	5) ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين

التحقق من فهمك

ص 92

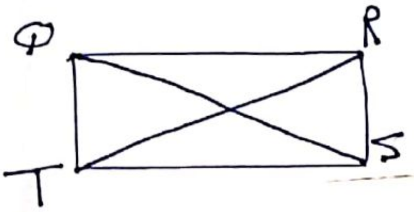
يبين الشكل المجاور $\square PONM$ اذا كان $\overline{PN} \cong \overline{OM}$ اثبت باستعمال البرهان ذي العمودين ان PONM مستطيل



العبارات	المبررات
$\overline{PN} \cong \overline{OM}$	معطى
$\overline{PM} \cong \overline{ON}$	ضلعان متقابلان في متوازي اضلاع
$\overline{MN} \cong \overline{MN}$	ضلع مشترك
$\triangle PMN \cong \triangle ONM$	SSS
$\angle M \cong \angle N$	زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقان
$\angle M$ و $\angle N$ قوائم	متطابقتان ومتكاملتان في متوازي اضلاع
$\angle P$ و $\angle O$ قوائم	المبررات السابقة
PONM مستطيل	متوازي اضلاع له زاوية قائمة

* نتمكن استعمال خصائص المستطيل لايجاد قيم مجهولة :-

مثال



اذا كان $QRST$ مستطيلاً وكان $QS = 6x + 14$ و $RT = 9x + 5$

جد قيمة المتغير x

الحل :- قطرا المستطيل متطابقان :-

$$RT \cong QS$$

$$9x + 5 = 6x + 14$$

$$-6x \qquad -6x$$

$$3x + 5 = 14$$

$$-5 \qquad -5$$

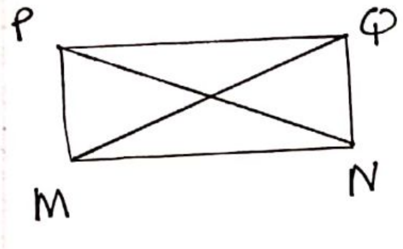
$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\boxed{x = 3}$$

التحقق من فهمك

ص 93

اذا كان $PQNM$ مستطيلاً وكان $MQ = 2x + 11$ ، $PN = 5x - 31$ جد قيمة المتغير x



الحل :- قطرا المستطيل متطابقان :-

$$MQ = PN$$

$$2x + 11 = 5x - 31$$

$$-2x \qquad -2x$$

$$11 = 3x - 31$$

$$+31 \qquad +31$$

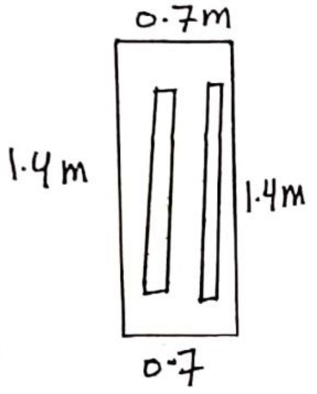
$$\frac{42}{3} = \frac{3x}{3}$$

$$x = 14$$

* يمكن استعمال خصائص المستطيل لتوضيح علاقات من واقع الحياة

مثال

نافذة: يبين الشكل المجاور اطار نافذة ابعادها موضحة في الشكل



① هل اطار النافذة على شكل مستطيل؟ ابرر اجابتي

الحل: يفهم من الشكل ان اضلاع الاطار المتقابلة لها الطول نفسه، لذا فالاطار على شكل متوازي اضلاع، ولكن لا يوجد ما يدل على ان الزوايا قوائم، لذا لا يمكن تحديد ما اذا كان الاطار على شكل مستطيل ام لا.

② قاس تميم طولي قطري الاطار، فوجد ان طول احدهما 2.45 m وطول الآخر 2.40 m فهل اطار النافذة على شكل مستطيل

الحل: بالرجوع الى نظرية قطري المستطيل، فان الشكل الرباعي يكون مستطيلاً اذا كان قطراه متطابقان، وبما ان قطري اطار النافذة ليسا متطابقين، اذن فاطار النافذة ليس على شكل مستطيل.

تحقق من فهمك

ص 94

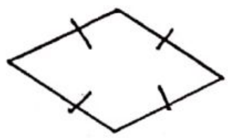
③ افترض ان قطري النافذة لهما الطول نفسه فهل اطارها على شكل مستطيل، ابرر اجابتي

الحل: نعم مستطيل لانه متوازي اضلاع قطراه متطابقان

المعين

هو متوازي اضلاع اضلاعه جميعها متطابقة.

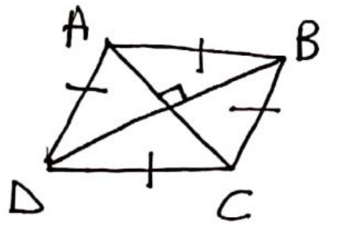
للمعين صفات متوازي الاضلاع جميعها بالاضافة الى الخاصيتين في النظريتين



نظريات

* نظرية قطري المعين

يكون متوازي الاضلاع معيناً اذا وفقط اذا كان قطراه متعامدين

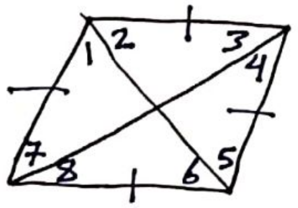


يكون $\square ABCD$ معيناً اذا وفقط اذا

كان $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

* نظرية الزوايا المتقابلة في المعين

يكون متوازي الأضلاع معيناً اذا وفقط اذا نصف كل قطر من قطريه الزاويتين المتقابلتين اللتين يصل بين رأسيهما



$\angle 1 \cong \angle 2$

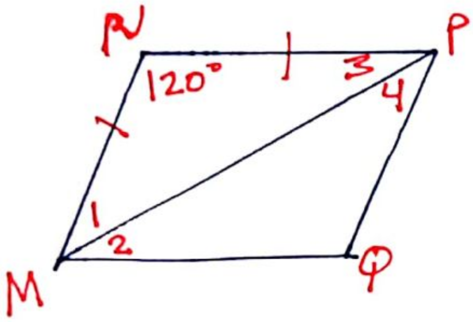
$\angle 3 \cong \angle 4$

$\angle 5 \cong \angle 6$

$\angle 7 \cong \angle 8$

* يمكن استعمال خصائص المعين لايجاد قيم مجهولة.

مثال: يبين الشكل المجاور المعين NPQM، اذا كانت $m\angle N = 120$ فاجد قياسات الزوايا المرقمة في الشكل



الحل:- المثلث NPM متطابق الضلعين وعليه زوايا القاعدة متساوية

$m\angle 1 = m\angle 3$

مجموع زوايا المثلث 180° وعليه

$m\angle 1 + m\angle 3 = 180 - 120 = 60$

وعليه $m\angle 1 = m\angle 3 = 30°$

وحسب نظرية الزوايا المتقابلة في المعين

$m\angle 1 = m\angle 2, = m\angle 3 = m\angle 4$

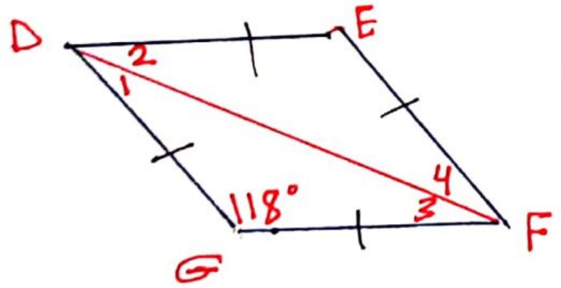
وعليه:-

$m\angle 2 = m\angle 1 = 30$

$m\angle 4 = m\angle 3 = 30°$

تذكير
المثلث المتطابق الضلعين زوايا القاعدة متطابقة

التحقق من فهمك ص95: يبين الشكل المجاور المعين DEFG اذا كانت $m\angle G = 118$ فاجد قياسات الزوايا المرقمة في الشكل



الحل:- المثلث DGF متطابق الضلعين وعليه زوايا القاعدة متساوية

$m\angle 1 = m\angle 3$

مجموع زوايا المثلث 180° وعليه

$m\angle 1 + m\angle 3 = 180 - 118 = 62$

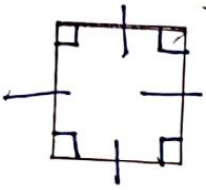
$m\angle 1 = m\angle 3 = 31°$

وحسب نظرية الزوايا المتقابلة في المعين

$m\angle 2 = m\angle 1 = 31°$

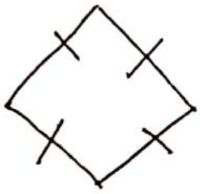
$m\angle 4 = m\angle 3 = 31°$

المربع: هو متوازي اضلاع اضلاعه جميعها متطابقة وزواياه الاربع قوائم، وبما أن المستطيل متوازي اضلاع زواياه الاربع قوائم، والمعين متوازي اضلاع أضلاعه الاربعة متطابقة، فان المربع مستطيل لان زواياه الاربع قوائم، وهو ايضاً معين لان اضلاعه الاربعة متطابقة، وهذا يعني ان جميع خصائص متوازي الاضلاع والمستطيل والمعين تنطبق على المربع



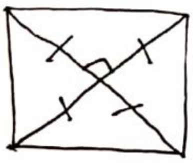
مثال: حدد ما اذا كان متوازي الاضلاع في كل مما يأتي مستطيلاً أم معيناً أو مربعاً.

(1)



الاضلاع متطابقة (معين)

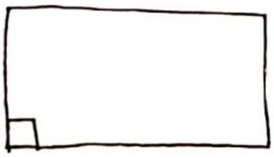
(2)



الاقطار متطابقة فان متوازي الاضلاع مستطيل، وبما أنه القطرين متعامدان فان متوازي الاضلاع معين ومنه فان متوازي الاضلاع المبين في الشكل مربع ايضاً

التحقق من فهمك ص 96

(3)



مستطيل لانه متوازي اضلاع احدى زواياه قائمة وبالتالي تكون كل زواياه قوائم حسب خصائص متوازي الاضلاع

(4)

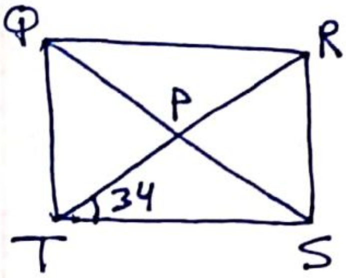
معين لان القطرين متعامدان

(5)

(التدرب وأحل المسائل)

- يبين الشكل المجاور المستطيل QRST وإذا كان قطراه يتقاطعان في النقطة P .

$m\angle PTS = 34$ و $QS = 10$ جد :-



① $m\angle QTR$

زوايا المستطيل قوائم وعليه :-

$m\angle QTR = 90 - 34 = 56$

② $m\angle QRT$

$m\angle QRT = 34$

متبادلة مع الزاوية PTS

③ $m\angle SRT$

$m\angle SRT = 56$

متبادلة مع $\angle QTR$

④ QP

الحل:

$QP = 5$

لأنه قطرا المستطيل ينصف كل منهما الآخر

⑤ RT

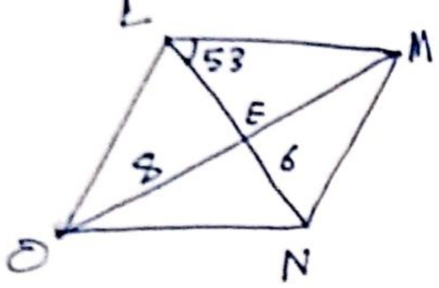
$RT = 10$

قطرا المستطيل متطابقان

⑥ RP

$RP = 5$

يبين الشكل المجاور المعين LMNO اذا كان قطراه يتقاطعان عند النقطة E و m∠NLM=53 و OE=8 و NE=6 فأجد كلاً مما يأتي :-



الحل :-

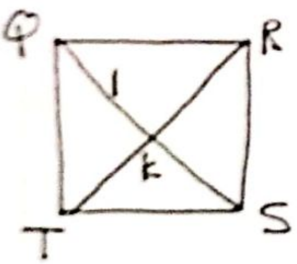
المعين اضلاعه متطابقة وقطراه متعامدان وقطراه ينصفان زوايا رؤوسه وقطراه ينصفان بعضهما

(7) $m\angle OLN$ 53 (8) $m\angle LEO$ 90 لتعامد القطران

متبادلة مع $\angle MLO$ ← (9) $m\angle LON$ 74 (10) OM 16

(11) LE 6 (12) LN 12

يبين الشكل المجاور المربع QRST اذا كان قطراه يتقاطعان عند النقطة K و QK=1 فأجد كلاً مما يأتي :-



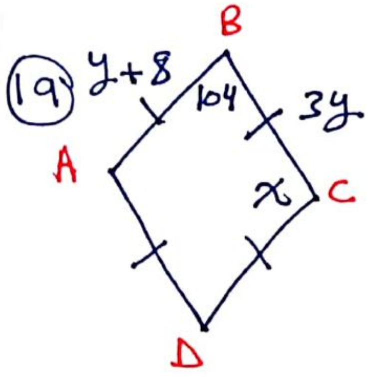
(13) $m\angle RKS$ 90° (14) $m\angle QTK$ 45°

(15) $m\angle QRK$ 45 (16) KS 1

(17) QS 2 (18) RT 2

احدد ما اذا كان متوازي الاضلاع في كل مما يأتي مستطيلاً أم معيناً أم مربعاً ، مبرراً اجابتي ، ثم اجد قيمة كل من x و y

(19)



الحل :- جميع الاضلاع متطابقة
فليست الزوايا قائمة وعليه
الشكل معين

$\angle B$ و $\angle C$ متحالفتان

$$m\angle C = 180 - 104 = 76$$

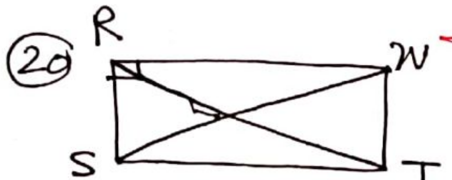
$$x = 76$$

الاضلاع متطابقة :-

$$y + 8 = 3y$$
$$-y \qquad -y$$
$$\frac{8}{2} = \frac{2y}{2}$$
$$\boxed{y = 4}$$

---

(20)



$RT = 4x + 10$

$SW = 5x - 20$

الحل :- مستطيل ، لأنه متوازي اضلاع
احدى زواياه قائمة وبالتالي
ستكون كل زواياه قوائم

قطراه متطابقان :-

$$RT = WS$$

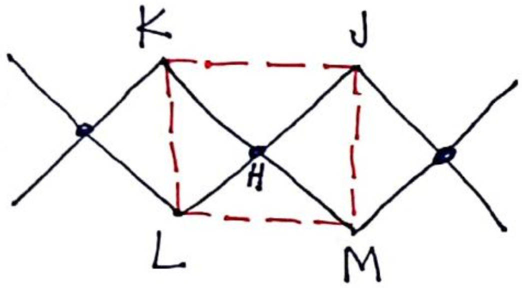
$$4x + 10 = 5x - 20$$
$$-4x \qquad -4x$$

$$10 = x - \cancel{20}$$
$$+20 \qquad \cancel{+20}$$

$$\boxed{x = 30}$$

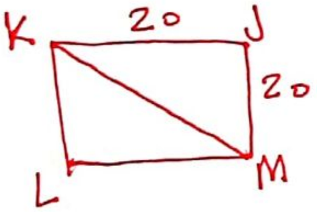
علاقة ملابس :- يبين الشكل المجاور علاقة ملابس مشبكة اذا كان KJML متوازي اضلاع وكان $\overline{KM} \perp \overline{LJ}$ و $m\angle K = 90$ فاجب عن كل مما يأتي

21) هل متوازي الاضلاع KJML مستطيل أم معين أم مربع



الحل :-
$\overline{KM} \perp \overline{LJ}$ وعليه معين
وبما ان احدى زواياه قائمة فيكون مستطيل.
وبما ان الشكل معين ومستطيل فعليه الشكل مربع

22) اذا كان KJ = 20 cm فاجد KM و JL مبرراً اجابتي



$\overline{KM} = \overline{JL}$

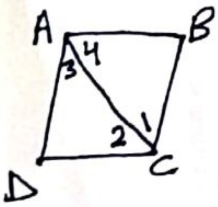
الشكل مربع :- نطبق فيثاغورس

$(KM)^2 = (KJ)^2 + (JM)^2$

$= 400 + 400 = 800$

$KM = \sqrt{800} = \sqrt{400 \times 2} = 20\sqrt{2}$

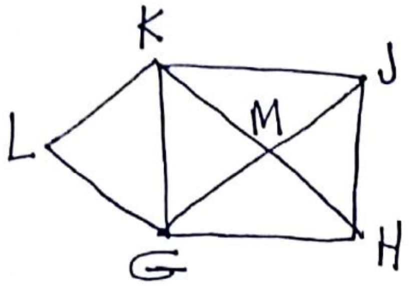
23) في الشكل الآتي :- اذا كان ADCB متوازي اضلاع وكان $\overline{AC}$ ينصف كلاً من $\angle A$ و $\angle C$ فاثبت ان ABCD معين باستعمال البرهان ذي العمودين



الحل :-

العبارات	المبررات
① $\angle 4 \cong \angle 2$	متبادلة داخلياً
② $\angle 1 \cong \angle 2$	$\overline{AC}$ ينصف $\angle C$
③ $\angle 1 \cong \angle 4$	نتيجة من ① و ②
④ $\triangle ABC$	متطابق الضلعين
⑤ $AB \cong CB$	ساقا المثلث
⑥ $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	اضلاع متقابلة في متوازي الاضلاع
$\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{BC} = \overline{AD}$	نتيجة
ABCD معين	جميع اضلاعه متطابقة

(24) في الشكل الآتي، إذا كان GHJK متوازي أضلاع، وكان $\triangle LGK \cong \triangle MJK$ فأثبت أن GHJK معين، باستعمال البرهان السهمي



الحل :-

$\square GHTK$
معطى
↓
$KJ \cong GH$
$KG \cong JH$
أضلاع متقابلة

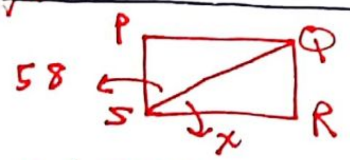
$\triangle LGK \cong \triangle MJK$
معطى
↓
$GK \cong JK$
ضلعان متناظران

↓

$KJ \cong JH \cong HG \cong GK$
نتيجة
↓
GHJK معين
التعريف: جميع الأضلاع متطابقة

---

(25) اكتشف الخطأ: انظر الحل الآتي، واكتشف الخطأ الوارد فيه، وصححه، علماً بأن PQRS مستطيل



$m\angle QSP = m\angle QSR$
$= 58$

الحل :- قطر المستطيل لا ينصف زوايا الرأس

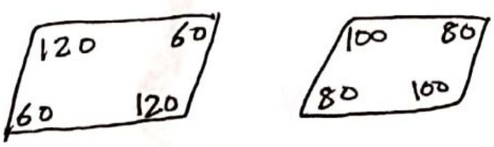
$m\angle QSR = 90 - 58 = 32°$

---

(26) تبرير: هل المعينات جميعها متشابهة، برر إجابتي

الحل :- التشابه: الأضلاع متناسبة والزوايا متطابقة

لا، انظر الأشكال المجاورة



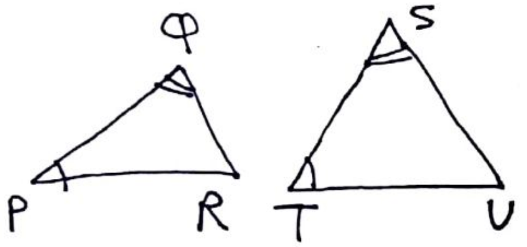
الدرس 5

تشابه المثلثات

* المضلعات المتشابهة هي مضلعات زواياها المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة، وتعد المثلثات حالة خاصة من المضلعات، وتوجد مسلمات ونظريات لإثبات تشابه المثلثات

مسلمة :- التشابه بزاويتين AA

اذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر فان المثلثين متشابهان.



اذا كان $\angle P \cong \angle T$ و $\angle Q \cong \angle S$

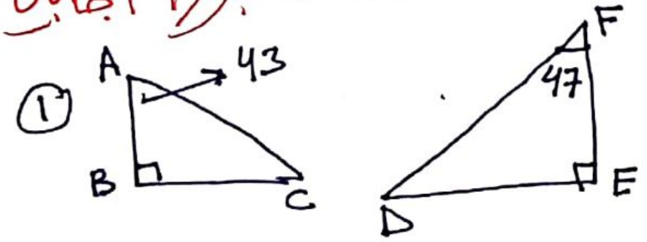
فان $\triangle PQR \sim \triangle TSU$

يمكن استعمال مسلمة AA لتحديد ما اذا كان مثلثان متشابهان أم لا

مثال

حدد ما اذا كان كل مثلثين مما يأتي متشابهين أم لا واذا كانا كذلك، اكتب عبارة التشابه، مبرراً اجابتك

①



الحل :- $\angle B \cong \angle E$ لأنهما زاويتان قائمتان

مجموع زوايا المثلث $180°$ وعليه

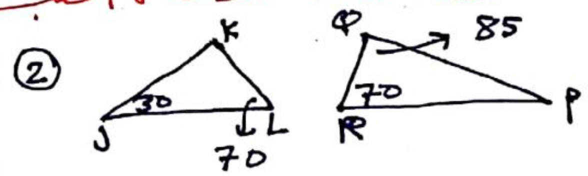
$m\angle C = 180 - (90 + 43) = 47$

وعليه $\angle C \cong \angle F$

اذن $\triangle ABC \sim DEF$

وفق المسلمة (AA)

②



الحل :- $\angle L \cong \angle R$

$m\angle K = 180 - (30 + 70) = 80$

$m\angle P = 180 - (85 + 70) = 25$

وعليه يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتطابقة، اذن :-

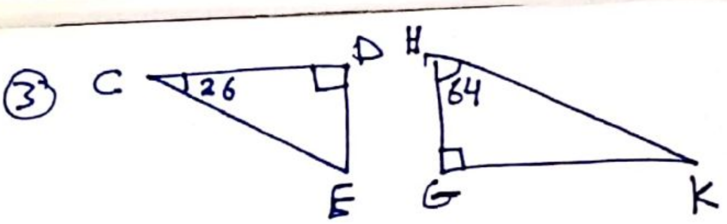
$\triangle PQR$ و $\triangle JKL$ ليسا متشابهين

ر. أستاذ ابراهيم صبافي

التحقق من فهمي

100 ص

(3)



$\angle D \cong \angle G$

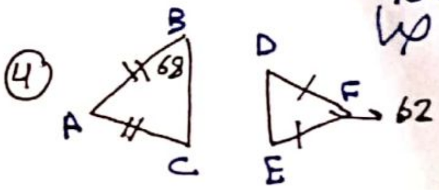
$m\angle E = 180 - (90+26) = 64$

وعليه $\angle E \cong \angle H$

اذن $\triangle CED \sim \triangle KHG$

وحسب المسلمة (AA)

(4)



الحل :- زوايا القاعدة متطابقة للمثلث المتطابق الضلعين

$m\angle C = 68$

$m\angle A = 180 - (68+68) = 54$

المثلث DEF :-

$\underbrace{m\angle E + m\angle D}_{\text{متساويات}} = 180 - 62 = 118$

$m\angle E = m\angle D = 59$

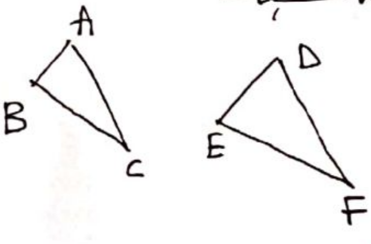
لا يوجد زاويتان متطابقتان وعليه غير متشابهات

في ما يأتي طريقتان اخريان لتحديد ما اذا كان مثلثان متشابهين أم لا

نظريات

* التشابه بثلاثة أضلاع (SSS)

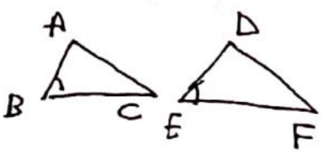
اذا كانت الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة فان المثلثين متشابهان.



$\triangle ABC \sim \triangle DEF,\ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

* التشابه بضلعين وزاوية محصورة (SAS)

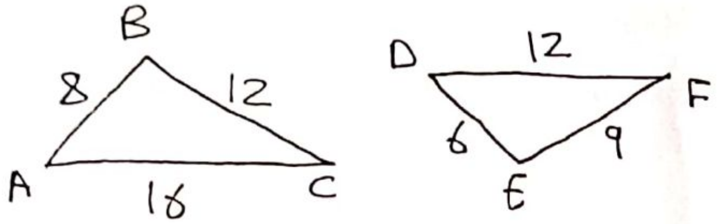
اذا كان طولا ضلعين في مثلث متناسبين مع طولي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر وكانت الزاويتان المحصورتان بينهما متطابقتين فان المثلثين متشابهان



$\triangle ABC \sim \triangle DEF,\ \angle B \cong \angle E,\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

مثال: حدد ما اذا كان كل مثلثين مما يأتي متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك اكتب عبارة تشابه مبرراً اجابتي.

(1)



الحل:

أطول ضلعين:

$\frac{CA}{FD} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

أقصر ضلعين

$\frac{AB}{DE} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

الضلعان المتبقيان

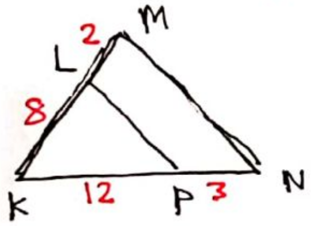
$\frac{BC}{EF} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

بما أن النسب جميعها متساوية إذن:

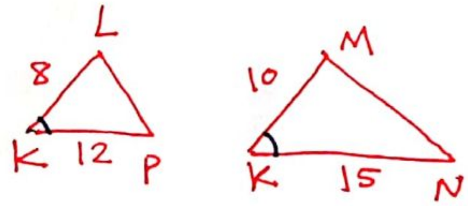
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

وفق نظرية تشابه SSS

(2)



مثلثان متداخلان



أقصر ضلعين

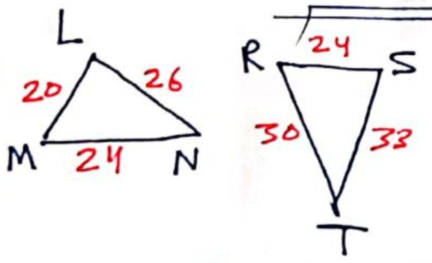
$\frac{KL}{KM} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

أطول ضلعين

$\frac{KP}{KN} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

بما أن طولي الضلعين اللذين يحصران $\angle K$ في ΔKLP متناسبان مع طولي الضلعين المناظرين لهما في ΔKMN إذن $\Delta KLP \sim \Delta KMN$ وفق نظرية التشابه SAS

(3)



الضلعان المتبقيان

$\frac{MN}{RT} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

أقصر ضلعين

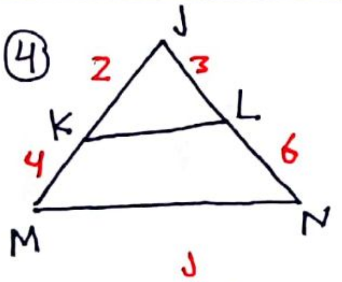
$\frac{LM}{RS} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

أطول ضلعين

$\frac{LN}{RT} = \frac{26}{33}$ أبسط صورة

وعليه لا يوجد تشابه لأن الأضلاع المتناظرة ليست متناسبة

(4)

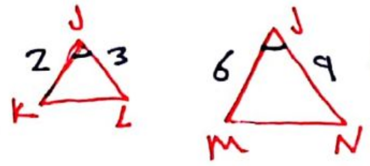


التحقق من فهمي

١٥١

ص

الحل:



أقصر ضلعين

$\frac{JM}{JK} = \frac{6}{2} = 3$

أطول ضلعين

$\frac{JN}{JL} = \frac{9}{3} = 3$

المثلثان متشابهان

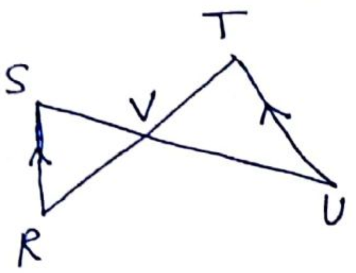
$\Delta MJN \sim \Delta KJL$

(SAS)

(3)

يمكنني استعمال مسلمة التشابه ونظرياتها في اثبات تشابه مثلثين

مثال : استعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور لاثبت ان $\triangle SVR \sim \triangle UVT$ باستعمال البرهان ذي العمودين

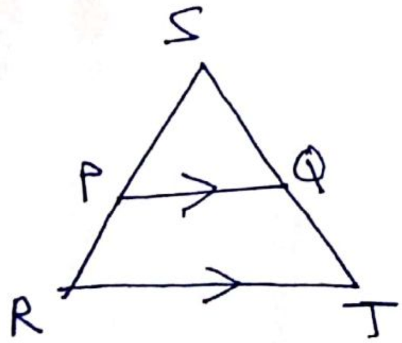


الحل :-

العبارات	المبررات
$\angle SVR \cong \angle UVT$	زاويتان متقابلتان في الرأس
$\overline{SR} \parallel \overline{UT}$	معطى
$\angle S \cong \angle U$	زاويتان متبادلتان داخلياً
$\triangle SVR \cong \triangle UVT$	مسلمة تشابه AA

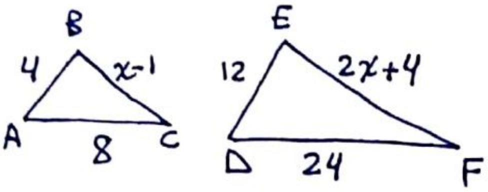
التحقق من فهمك

1 استعمل المعلومات المعطاة على الشكل المجاور لاثبت ان $\triangle SPQ \sim \triangle SRT$ باستعمال البرهان السهمي



يمكن استعمال تشابه المثلثات في ايجاد قياسات مجهولة

مثال ١) جد قيمة x التي تجعل $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



نكتب التناسب :

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

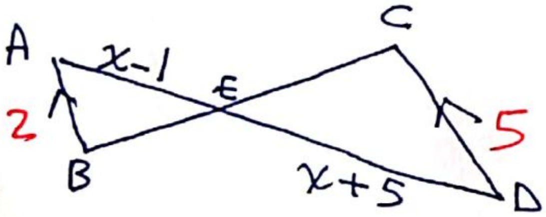
$$\frac{4}{12} = \frac{x-1}{2x+4}$$ ضرب تبادلي

$$12x - 12 = 8x + 16$$
$$-8x \qquad -8x$$
$$4x - 12 = 16$$
$$+12 \quad +12$$
$$4x = 28$$
$$\boxed{x = 7}$$

جد قيمة x التي تجعل $\triangle ABE \sim \triangle DCE$

التحقق من فهمك

103 ص



نكتب التناسب

انتبه الى ترتيب الاحرف

$\triangle ABE \sim \triangle DCE$

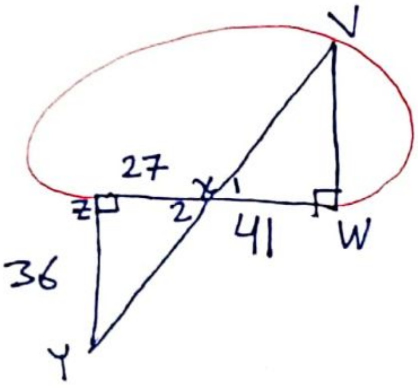
$$\frac{x+5}{x-1} = \frac{5}{2}$$

$$5x - 5 = 2x + 10$$
$$-2x \qquad -2x$$
$$3x - 5 = 10$$
$$+5 \quad +5$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$
$$\boxed{x = 5}$$

مسائل من الحياة

مثال يريد ماسح قياس عرض بحيرة باستعمال تقنية المسح المبينة في الشكل المجاور، جد عرض البحيرة VW

الحل:-



المثلثان متشابهان لوجود زاويتان لهما نفس القياس:-

$\angle Z \cong \angle W$ قوائم

$\angle 1 \cong \angle 2$ تقابل بالرأس

$\triangle XZY \sim \triangle XWV$

نكتب التناسب:-

لنفرض ان عرض البحيرة x

$$\frac{YZ}{VW} = \frac{Zx}{Wx}$$

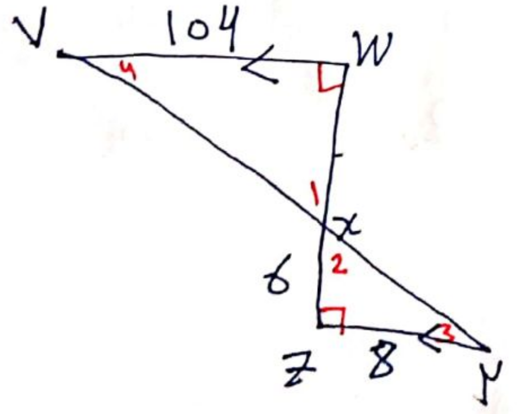
$$\frac{36}{x} = \frac{27}{41}$$

تبادلي

$$\frac{27x}{27} = \frac{1476}{27}$$

$$x \simeq 54.7$$

تحقق من فهمك يبين الشكل المجاور طريقة اخرى لقياس عرض البحيرة جد عرض البحيرة Wx منه



المثلثان متشابهان لوجود زاويتان

$\angle 1 \cong \angle 2$ تقابل بالرأس أو $\angle 3 \cong \angle 4$ تبادل

$\angle W \cong \angle Z$ قوائم

نكتب التناسب

افرض عرض البحيرة x

$$\frac{Wx}{Zx} = \frac{VW}{YZ}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{104}{8}$$

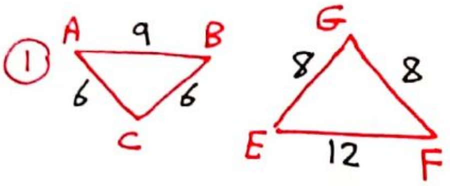
$$\frac{8x}{8} = \frac{624}{8}$$

$$x = 78$$

(التدرب وأحل المسائل)

حدد ما اذا كان كل مثلثين مما يأتي متشابهين أم لا
واذا كانا كذلك، فاكتب عبارة تشابه، مبرراً اجابتك

①



الحل: هنا فقط وجود أطوال الأضلاع

اطول ضلع $\frac{EF}{AB} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

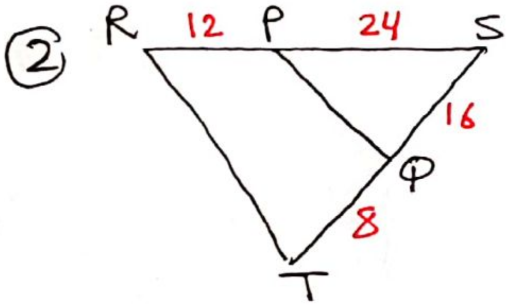
اقصر ضلعين $\frac{GF}{CB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

"لا يوجد ثالث"

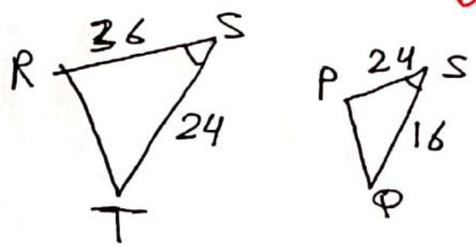
وعليه المثلثان متشابهان $\triangle ABC \sim \triangle EFG$

(SSS)

②



المثلثان متداخلان الافضل هو فصلهما



$\angle S$ مشتركة

$\frac{RS}{PS} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$

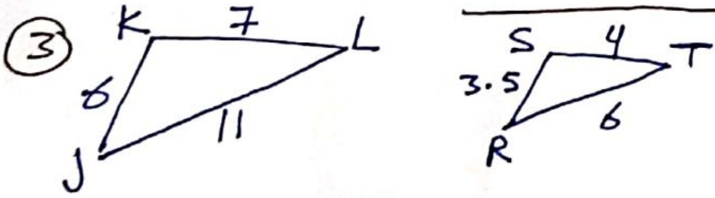
$\frac{ST}{SQ} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

المثلثان متشابهان

$\triangle RST \sim \triangle PSQ$

(SAS)

③



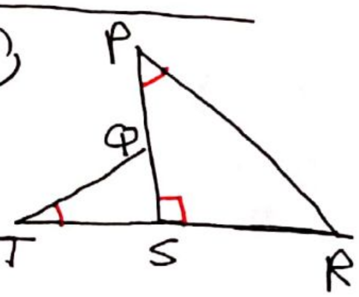
اطول ضلعين $\frac{11}{6}$

اقصر ضلعين $\frac{6}{3.5} = \frac{60}{35} = \frac{12}{7}$

وعليه المثلثان غير متشابهين

لأنه الاضلاع غير متناسبة

④



الحل:

معطى $\angle T \cong \angle P$

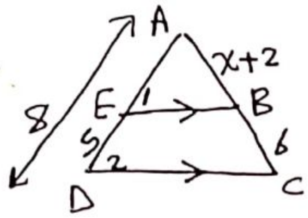
$\angle RSQ \cong \angle TSQ$ متجاورتان مجموعهما 180

وعليه المثلثان متشابهان

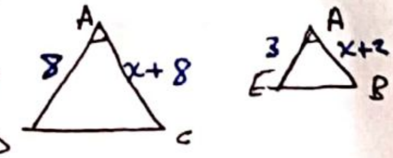
(AA)

اثبت ان كل مثلثين مما يأتي متشابهان ثم جد الطول المطلوب

⑤ AB



الحل: يوجد مثلثان متداخلان



$\angle A$ مشتركة

$\angle 1 \cong \angle 2$ تناظر

وعليه المثلثان متشابهان (AA)

نرتب احرف المثلث

$\triangle ACD \sim \triangle ABE$

نشكل تناسب :-

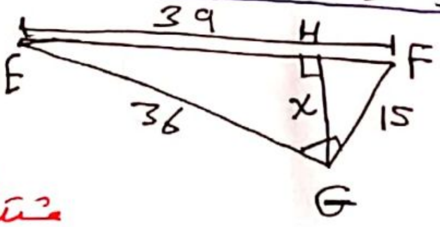
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

$$\frac{x+2}{x+8} = \frac{3}{8}$$

$$8x + 16 = 3x + 24$$
$$-3x \qquad -3x$$
$$5x + 16 = 24$$
$$-16 \quad -16$$
$$5x = 8$$
$$x = \frac{8}{5}$$

وعليه $AB = x + 2 = \frac{8}{5} + 2 = \frac{18}{5}$

⑥ HG



الحل: يوجد مثلثان متداخلان

$\angle F$ مشتركة

$\angle G \cong \angle FHG$ معطى

وعليه المثلثان متشابهان (AA)

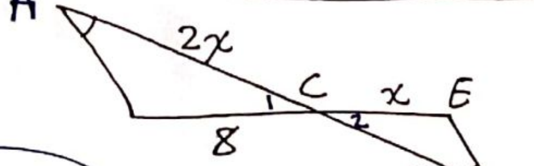
نرتب احرف المثلث

$\triangle EGH \sim \triangle GHF$

نشكل تناسب :-

$$\frac{36}{x} = \frac{39}{15} \longrightarrow \frac{39x}{39} = \frac{540}{39} \longrightarrow x = 13.8$$

⑦ AC



$\angle A \cong \angle F$ معطى

$\angle 1 \cong \angle 2$ تقابل بالرأس

وعليه المثلثان متشابهان (AA)

نرتب احرف المثلث

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$

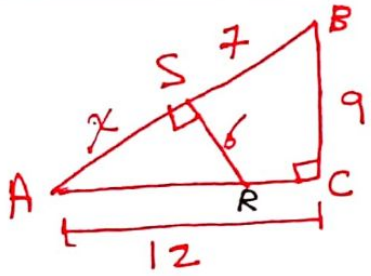
نشكل تناسب :- $\frac{2x}{9} = \frac{8}{x}$ بالتبادل

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{72}{2}$$
$$x^2 = 36$$
$$x = 6$$

وعليه $AC = 2x = 12$

⑧

⑧ AB



. $\angle C \cong \angle RSA$ معطى

. $\angle A$ مشتركة

$\triangle ASR \sim \triangle ACB$ (AA)

تشكل تناسب :

$$\frac{AS}{AC} = \frac{SR}{BC}$$

بالتعويض $\frac{x}{12} = \frac{6}{9}$

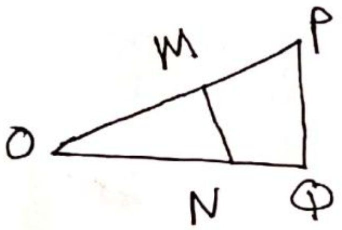
$$\frac{9x}{9} = \frac{72}{9}$$

$x = 8$

وعليه $AB = x+7$
$= 15$

---

⑨ عجلة :- يبين الشكل المجاور عجلة دوارة ، فاذا علمت ان $OM = ON = 3$ وان $MP = NQ = 1.5$ m فابين ما اذا كان $\triangle OMN \sim \triangle OPQ$ أم لا .



. الحل: $\angle O$ مشتركة

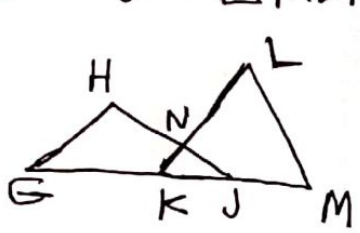
$$\frac{OM}{OP} = \frac{3}{4.5} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{OQ}{ON} = \frac{3}{4.5} = \frac{2}{3}$$

المثلثان متشابهان : ضلعان متناسبان وزاوية محصورة (SAS)

---

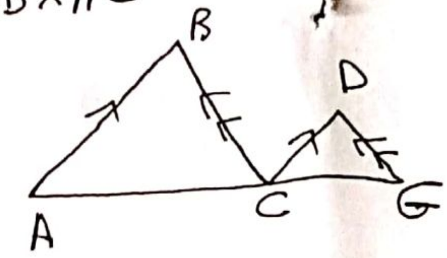
⑩ في الشكل الآتي اذا كان $\triangle KNJ$ متطابق الضلعين و $\angle N$ زاوية رأس ، وكان $\angle L \cong \angle H$ فاثبت $\triangle GHJ \sim \triangle MLK$ باستعمال برهان ذي العمودين



المبررات	العبارات
$\triangle KNJ$ متطابق الضلعين	$\angle JKN \cong \angle KJN$
معطى	$\angle L \cong \angle H$
AA	$\triangle GHJ \sim \triangle MLK$

(11) استعمل المعلومات المعطاه على الشكل الآتي لتثبت أن :

$AB \times CG = CD \times AC$



$\boxed{AB \parallel CD}$ معطى → $\boxed{\angle A \cong \angle GCD}$ زاويتان متناظرتان

$\boxed{BC \parallel DG}$ معطى → $\boxed{\angle G \cong \angle BCA}$ زاويتان متناظرتان

$\boxed{\triangle ABC \sim \triangle CDG}$

AA

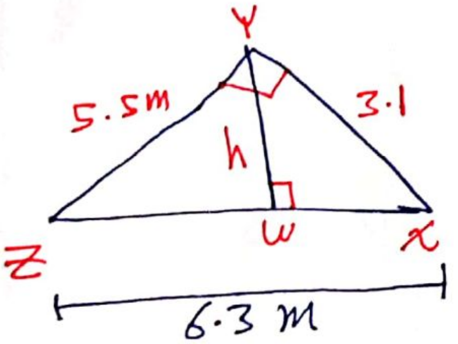
تشكل تناسب ∴

$\frac{AB}{CD} = \frac{AC}{CG}$ تبادلي

$AB \times CG = AC \times CD$

---

(12) يبين الشكل المجاور الواجهة الامامية لسطح منزل كيف يمكنني معرفة الارتفاع h



الحل: نثبت اولاً تشابه المثلثان

$\angle x$ مشتركة

$\angle Y \cong \angle XWY$ معطى

$\triangle ZYX \sim \triangle YWX$

(AA)

تشكل تناسب

$\frac{Zx}{Yx} = \frac{Zy}{yW}$

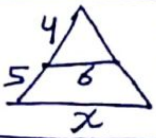
تبادلي $\frac{6.3}{3.1} = \frac{5.5}{h}$

$\frac{6.3h}{6.3} = \frac{17.05}{6.3}$

$h \simeq 2.7$

اكتشف الخطأ: انظر الحل الآتي واكتشف الخطأ في ايجاد قيمة x واصححه.

X



$\frac{4}{5}=\frac{6}{x}$

$4x=30$

$x=7.5$

الحل: تشكيل التناسب خطأ:

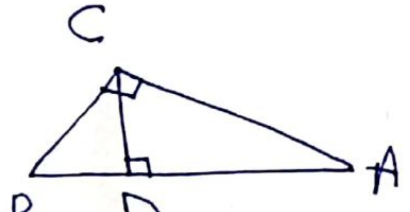
تناسب

$$\frac{4}{9}=\frac{6}{x}$$

$$\frac{4x}{4}=\frac{54}{4}$$

$$\boxed{x=13.5}$$

(14) تحدٍّ: احدد في الشكل المجاور ثلاثة مثلثات متشابهة ثم اكتب ثلاث جمل لتعيين المثلثات، واثبتها جميعها



الحل:

$\triangle ADC \sim \triangle ACB \sim \triangle CDB$

جميعها متشابهة لأنّ:

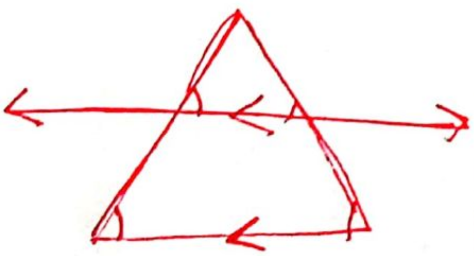
$\angle D \sim \angle C$

$\angle A$ مشتركة

$\angle B$ مشتركة

نأخذ كل مثلثين ونفحص الزوايا

(15) تبرير: هل المستقيم الذي يقطع ضلعين مثلث ويكون موازياً للضلع الثالث من المثلث يشكل مثلثين متشابهين؟ أبرر اجابتي.



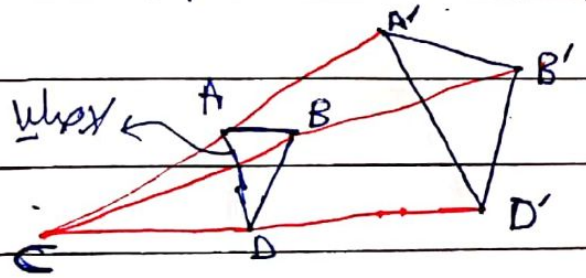
نعم، توجد زاويتان متناظرتان ((متطابقة)) متطابقتان مع زاوية أخرى مشتركة

التمدد

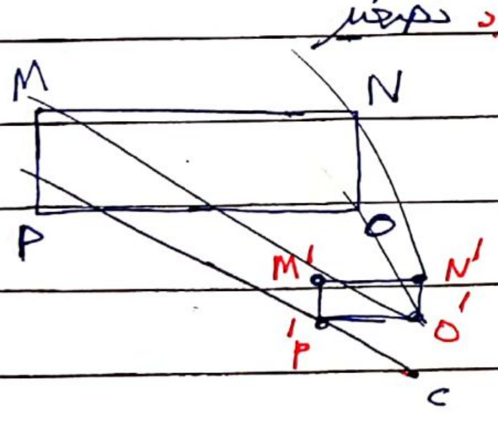
التمدد : هو تحويل هندسي يكبر الشكل او يصغره من نقطة ثابتة C تسمى مركز التمدد وبنسبة محددة تسمى معامل التمدد وقيمته K وهو نسبة احد أطوال الصورة الى الطول المناظر له في الشكل الاصلي

مفهوم: اذا كان التمدد الذي مركزه C ومعامله هو العدد الموجب K حيث $K \neq 1$ و $K > 1$ فان التمدد

* تكبير



* اذا كان التمدد الذي مركزه C ومعامله هو العدد الموجب K حيث $K \neq 1$ و $0 < K < 1$ فان التمدد تصغير

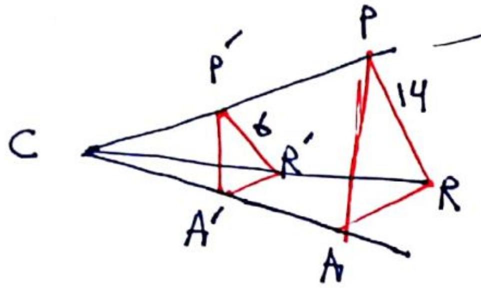


راقت ضايفي

مثال

جد معامل التمدد في كل مما يأتي ثم حدد ما اذا كان التمدد تكبير أم تصغير

(1)



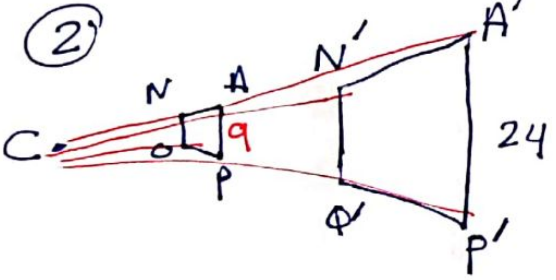
الحل :-

نأخذ نسبة طول احد الاضلاع الى الطول المناظر له بالشكل الاصلي

$$\frac{P'R'}{PR} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$ اقل من 1

$K = \frac{3}{7}$ التمدد تصغير

(2)



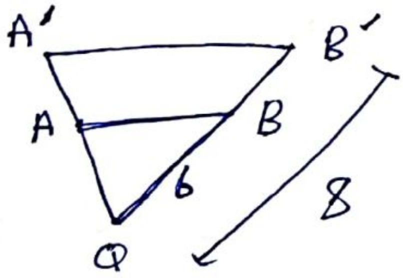
الحل :-

$$\frac{A'P'}{AP} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$ اكبر من 1

$K = \frac{8}{3}$ التمدد تكبير

التحقق من فهمك

(3)

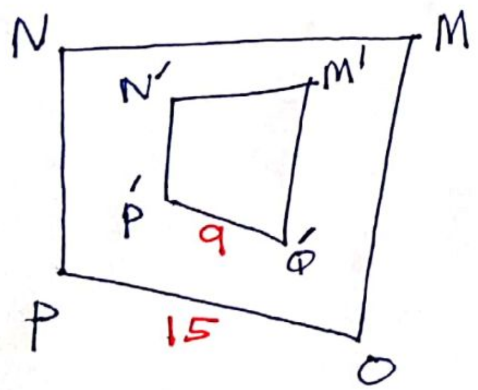


الحل :-

$$\frac{B'Q}{QB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$ اكبر من 1

$K = \frac{4}{3}$ تكبير

(4)



الحل :-

$$\frac{P'Q'}{PO}$$

$\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ اصغر من 1 تصغير

* يمكن ايجاد صورة النقطة $P(x,y)$ في المستوى الاحداثي الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الاصل ومعامله K بضرب احداثيي النقطة بمعامل التمدد

مفهوم أساسي

لايجاد احداثيات الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الاصل اضرب الاحداثيين x و y لكل نقطة في الشكل الاصلي في معامل التمدد K

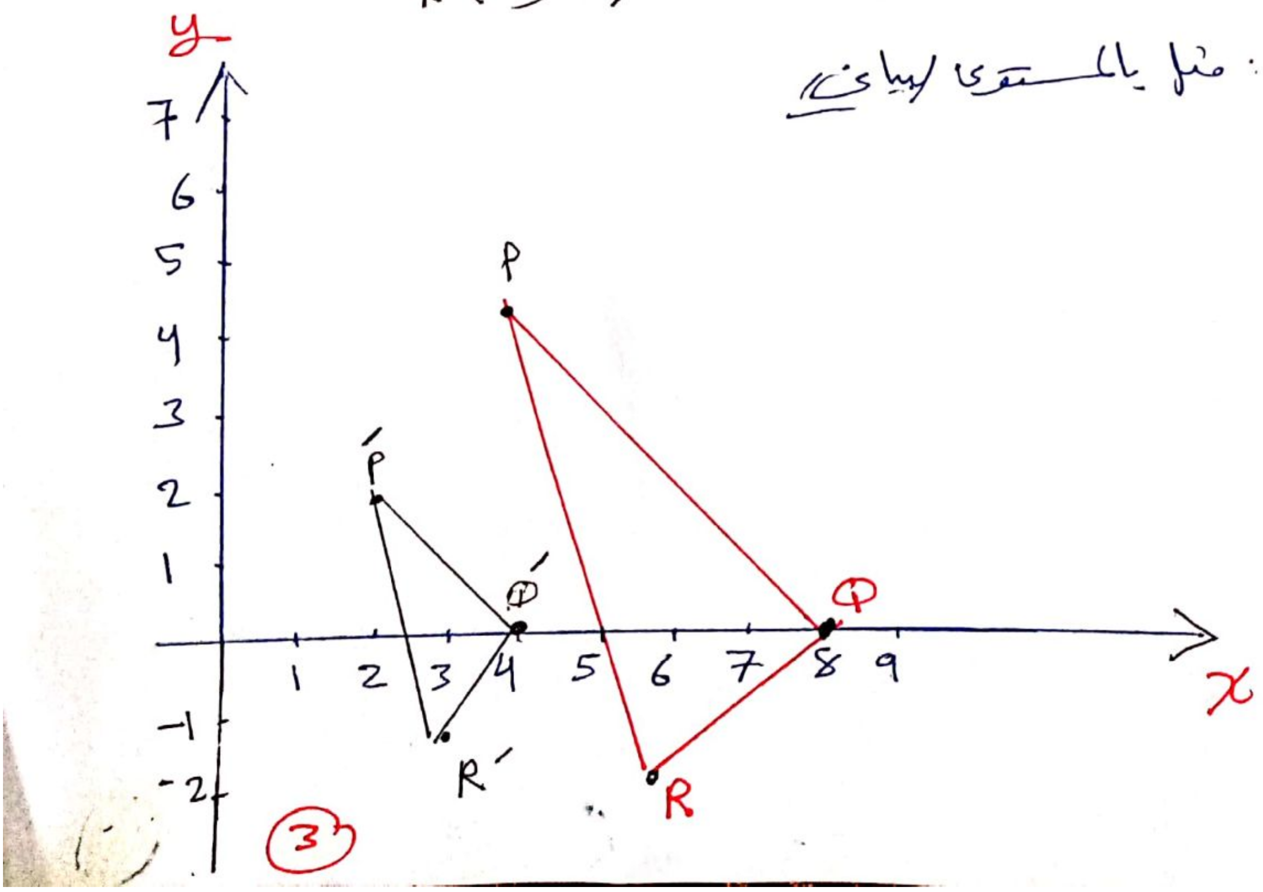
$$(x, y) \longrightarrow (Kx, Ky)$$

مثال: احداثيات رؤوس $\triangle PQR$ هي $P(4,4)$ ، $Q(8,0)$ ، $R(6,-2)$ مثله بيانياً وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الاصل ومعامله $\frac{1}{2}$

الخطوة (1) اضرب الاحداثيين x و y لكل رأس في معامل التمدد $\frac{1}{2}$

الاصلي		الصورة
$P(4,4)$	$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$	$P'(2,2)$
$Q(8,0)$	$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$	$Q'(4,0)$
$R(6,-2)$	$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$	$R'(3,-1)$

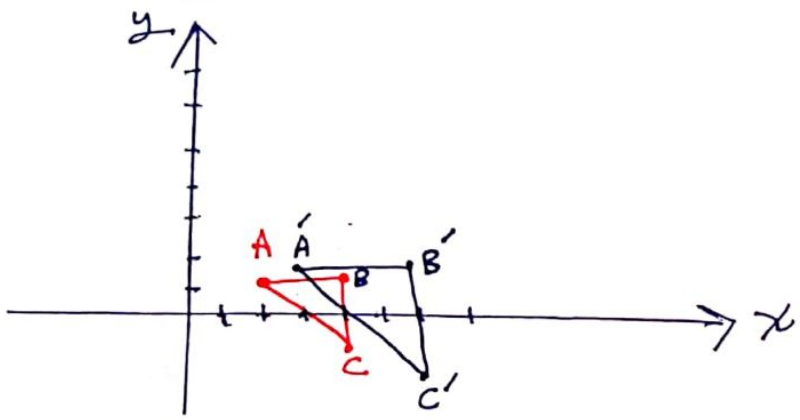
خطوة (2) : مثل بالمستوى البياني



(التحقق من فهمك) ③ احداثيات رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(2,1)$, $B(4,1)$, $C(4,-1)$
ص 108
امثل بيانياً $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الاصل ومعامله 1.5

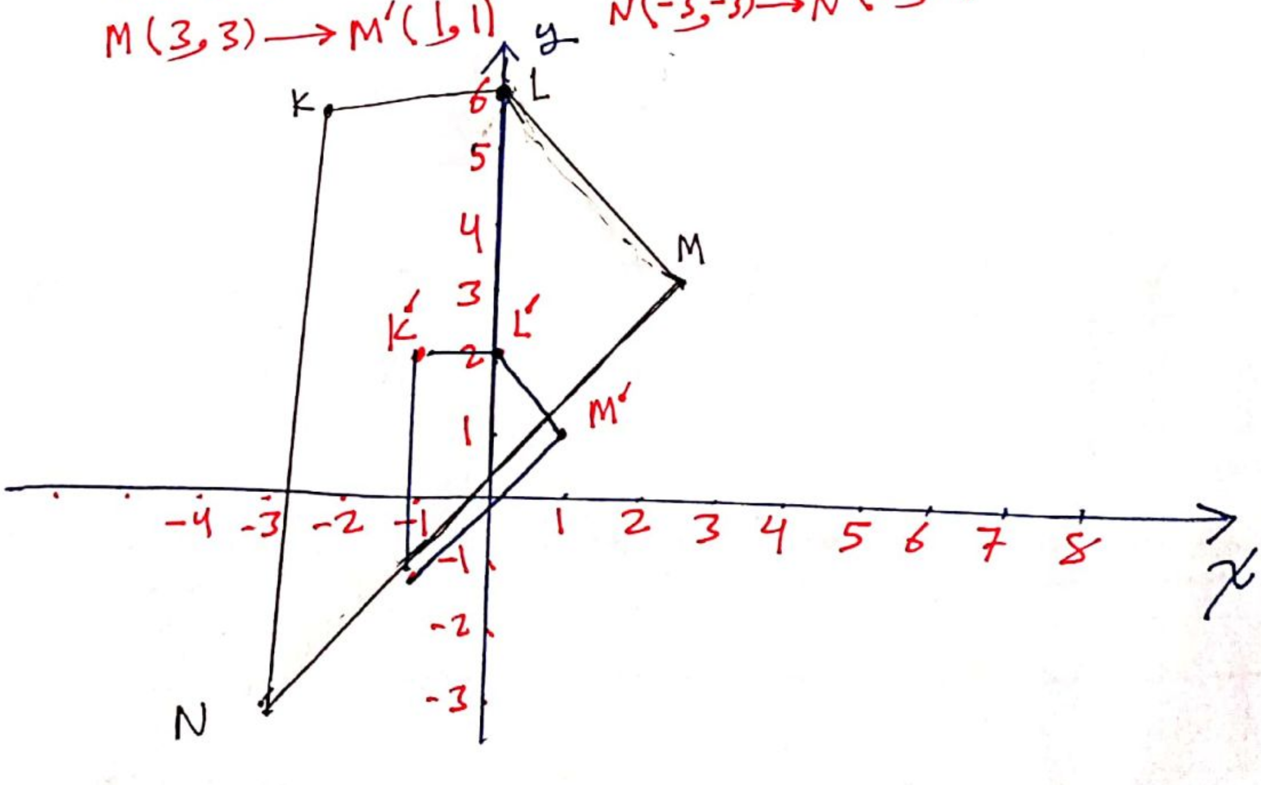
الحل :

$A(2,1) \longrightarrow A'(3,1.5)$
$B(4,1) \longrightarrow B'(6,1.5)$
$C(4,-1) \longrightarrow C'(6,-1.5)$



④ احداثيات رؤوس شكل رباعي $KLMN$
هي $N(-3,-3)$ و $M(3,3)$ و $L(0,6)$ و $K(-3,6)$
امثل بيانياً $VZXW$ وصورته الناتجة عن تمدد
مركزه نقطة الاصل ومعامله $\frac{1}{3}$

الحل :
$K(-3,6) \longrightarrow K'(-1,2)$ $L(0,6) \rightarrow L'(0,2)$
$M(3,3) \longrightarrow M'(1,1)$ $N(-3,-3) \rightarrow N'(-1,-1)$



④

تعلمنا سابقاً كيف اجد صورة شكل في المستوى الاحداثي تحت تأثير تمدد مركزه نقطة الاصل ومعامله موجب $K>0$ ويمكن ايضاً ايجاد صورة شكل في المستوى الاحداثي تحت تأثير تمدد مركزه نقطة الاصل ومعامله سالب $K<0$ باستعمال القاعدة نفسها

ان تمدد شكل في المستوى الاحداثي تحت تأثير معامل تمدد حقيقته $-K$ حيث K عدد موجب ومركزه نقطة الاصل ، هو نفسه تمدد الشكل تحت تأثير تمدد معامله K متبوعاً بدوران مقداره $180°$

(التحقق من فهمك) احداثيات رؤوس ΔPQR هي :-

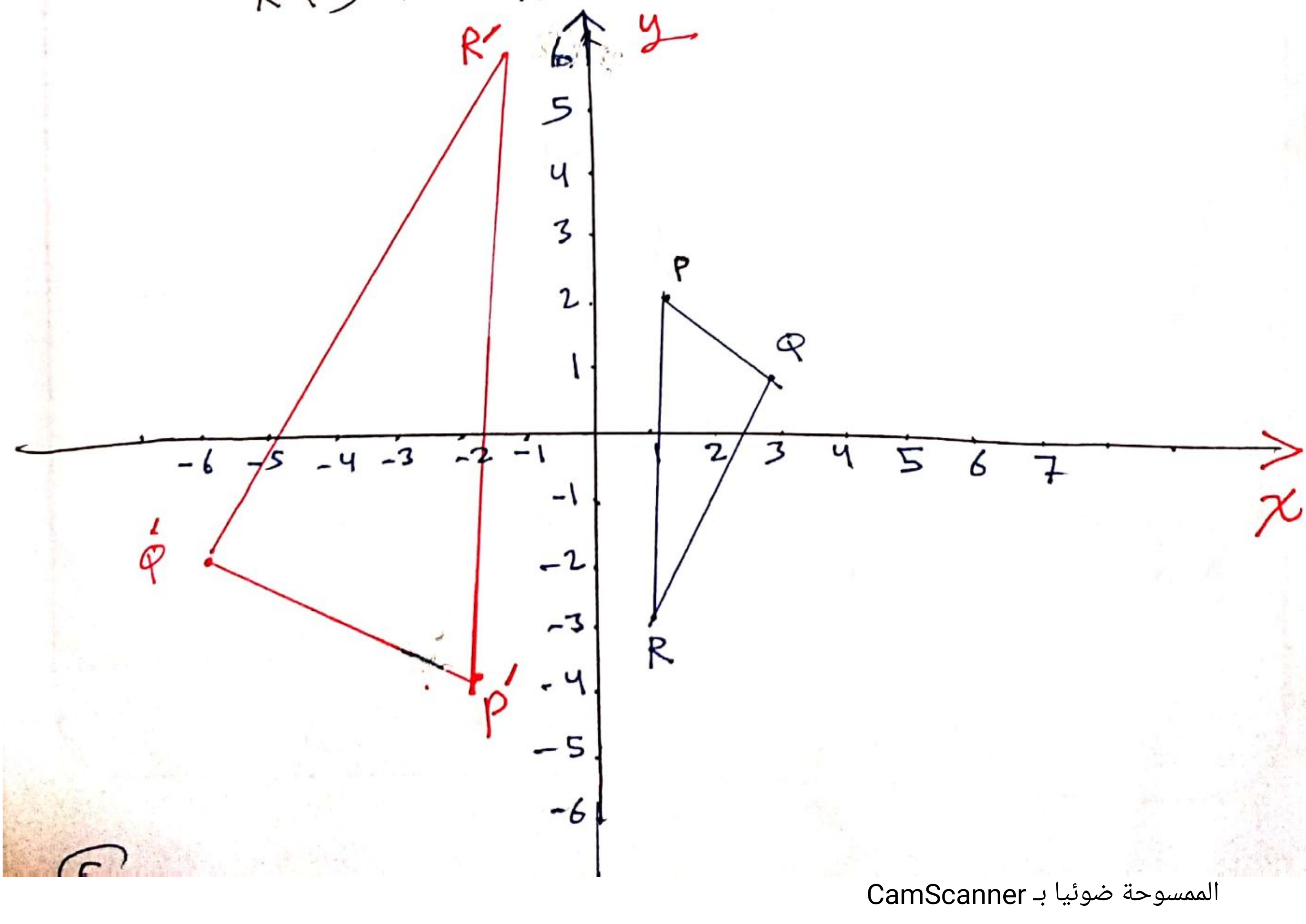
ص 109

$P(1,2)$ و $Q(3,1)$ و $R(1,-3)$ أمثل بيانياً ΔPQR وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الاصل ومعامله -2

$P(1,2) \longrightarrow P'(-2,-4)$

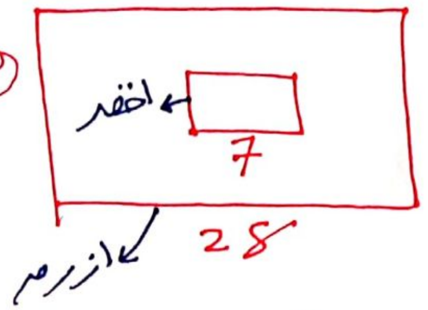
$Q(3,1) \longrightarrow Q'(-6,-2)$

$R(1,-3) \longrightarrow R'(-2,6)$

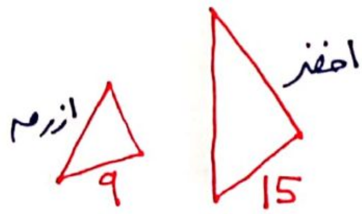


اتدرب واحل المسائل
ص ١٥١

اذا كان شكل باللون الأخضر صورة للشكل باللون الأزرق تحت تأثير تمدد مركزه C فاجد معامل التمدد في كل مما يأتي ثم احدد ما اذا كان التمدد تكبير أم تصغير واجد قيمة المتغير

① 

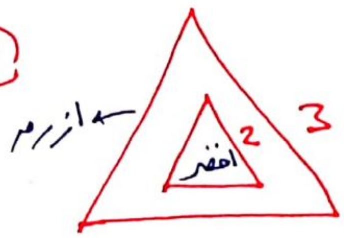
تصغير $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ اقل من ١ تصغير

② 

تكبير $\frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ اكبر من ١

③ 

$\frac{12}{6} = 2$ اكبر من ١ تكبير

④ 

تصغير $\frac{2}{3}$ اقل من ١

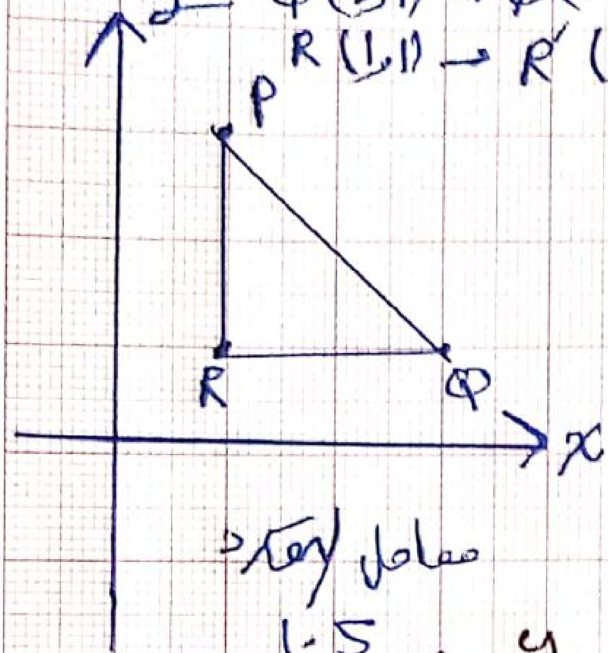
انسخ كل مضلع مما يأتي على ورقة مربعات ، ثم ارسم صورة له تحت تأثير تمدد مركزه نقطة الاصل ، مستعملاً معامل التمدد المعطى أسفله

(5)

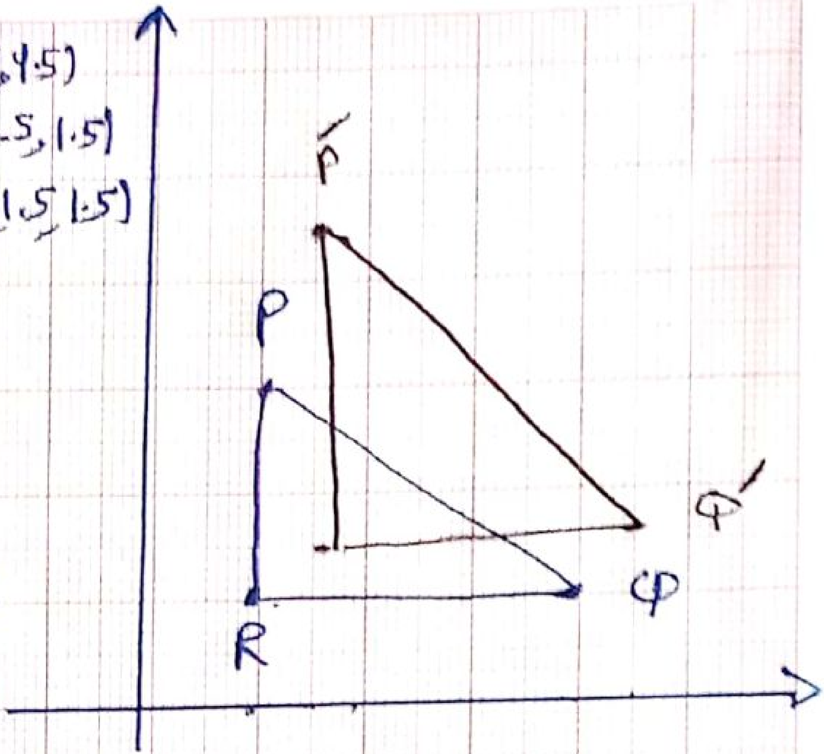
$P(1,3) \to P'(1.5, 4.5)$

$Q(3,1) \to Q'(4.5, 1.5)$

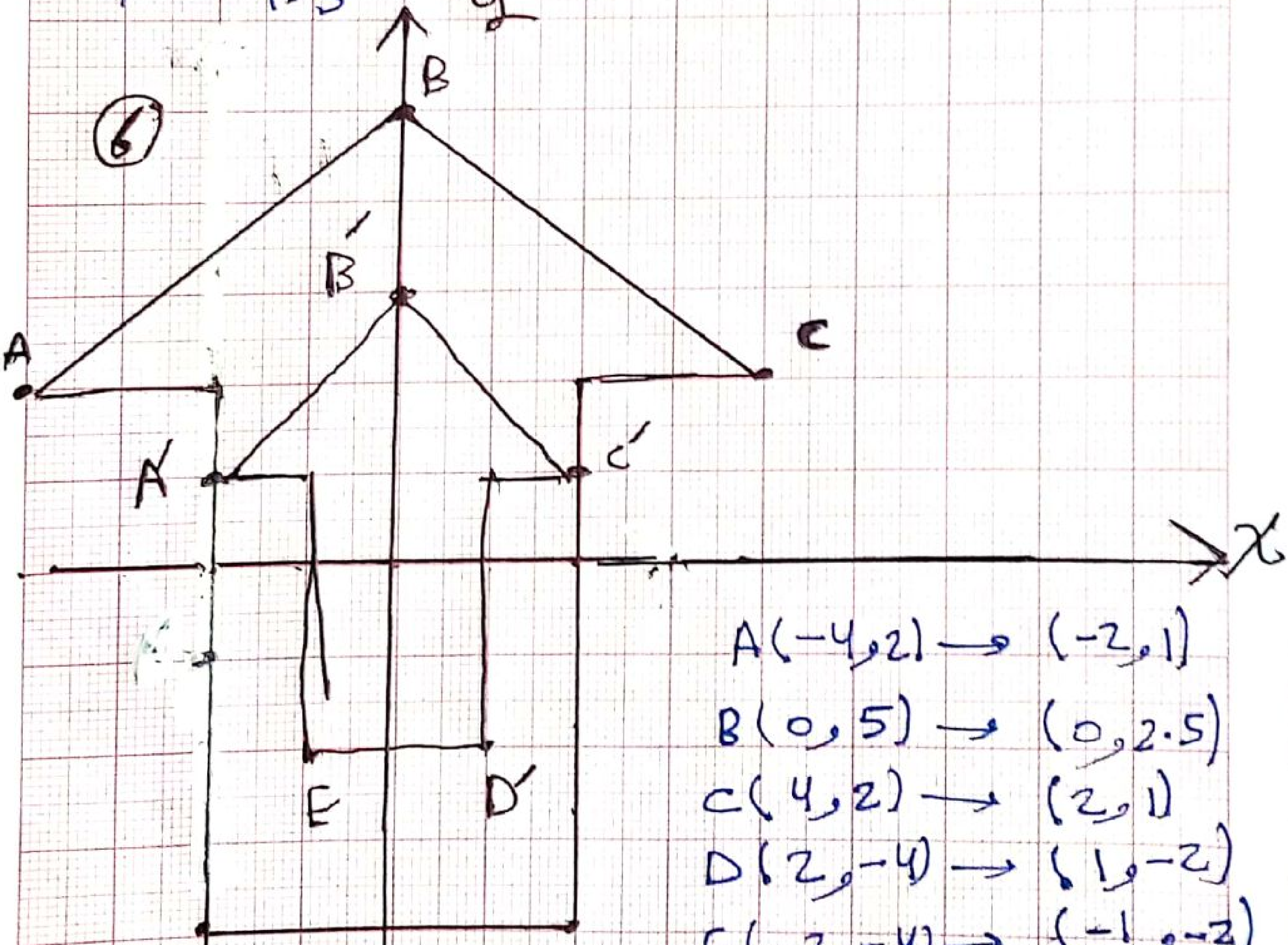
$R(1,1) \to R'(1.5, 1.5)$



معامل تكبير 1.5



(6)



$A(-4,2) \to (-2,1)$

$B(0,5) \to (0,2.5)$

$C(4,2) \to (2,1)$

$D(2,-4) \to (1,-2)$

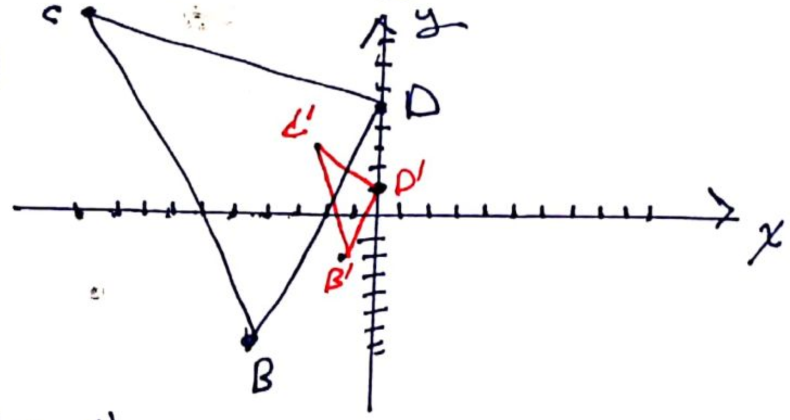
$E(-2,-4) \to (-1,-2)$

(6) معامل تكبير 0.5

* امثل المضلع المعطاة احداثيات رؤوسه بيانياً، ثم امثل صورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الاصل ومعامله العدد k في كل مما يلي :

(7) $B(-5,-10)$، $C(-10,15)$، $D(0,5)$ ، $K=\frac{1}{5}$

$B(-5,-10) \longrightarrow (-1,-2)$
$C(-10,15) \longrightarrow (-2,3)$
$D(0,5) \longrightarrow (0,1)$



(8) $L(0,0)$، $M(-4,1)$، $N(-3,-6)$: $K=-4$

$L(0,0) \longrightarrow L'(0,0)$
$M(-4,1) \longrightarrow M'(16,-4)$
$N(-3,-6) \longrightarrow N'(12,24)$

نرسم في المستوى ونعين النقاط

(9) $w(8,-2)$، $x(6,0)$، $Y(-6,4)$، $Z(-2,2)$ ؛ $k=-\frac{1}{2}$

$w(8,-2) \rightarrow w'(-4,+1)$
$x(6,0) \rightarrow x'(-3,0)$
$Y(-6,4) \rightarrow Y'(3,-2)$
$Z(-2,2) \rightarrow Z'(1,-1)$

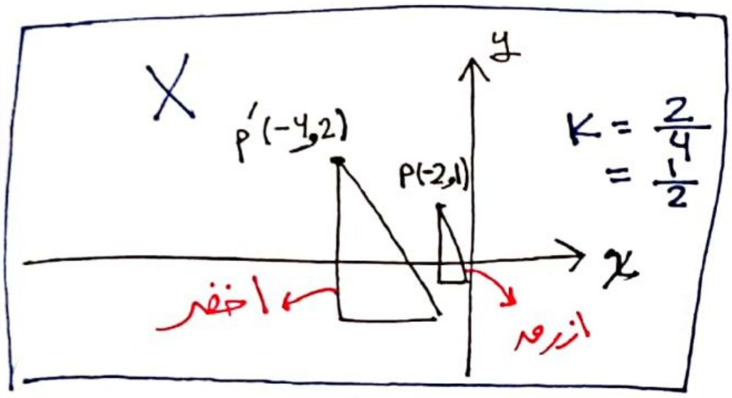
نرسم ونعين النقاط

(10) $x(-1,2)$، $Y(2,1)$، $Z(-1,-3)$ ؛ $K=\frac{7}{2}$

$x(-1,2) \longrightarrow x'(-\frac{7}{2}, 7)$
$Y(2,1) \longrightarrow Y'(7, \frac{7}{2})$
$Z(-1,-3) \longrightarrow Z'(-\frac{7}{2}, -\frac{21}{2})$

نرسم ونعين النقاط

اكتشف الخطأ :- في الحل الآتي ، اوجد سمير معامل التمدد الذي يجعل المثلث الأخضر صورة للمثلث الأزرق تحت تأثير تمدد مركزه نقطة الأصل. اكتشف الخطأ في حله وأصححه (11)



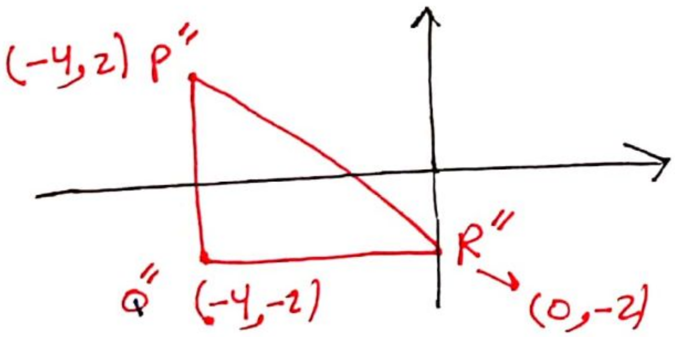
$P(-2,1) \longrightarrow P'(-4,2)$

هنا معامل التمدد 2

حيث قام سمير بحساب نسبة طول أحد أضلاع الشكل الأصلي الى طول الضلع المناظر له في الصورة

---

(12) تحدٍ: المثلث المبين في الشكل الآتي هو صورة لمثلث تحت تأثير تحويلين هندسيين: تمدد معامله 2 مركزه نقطة الأصل ثم انعكاس حول المحور Y ، جد احداثيات رؤوس المثلث الأصلي



الحل:- الرؤوس قبل التمدد نقسم على 2 ثم نغير اشارة احداثيا x

$P(2,1)$

$Q(2,-1)$

$R(0,-1)$